 ISSN 1984-820X

Análise comparativa entre o Método dos Elementos Finitos e o Método Analítico na determinação dos deslocamentos em vigas

Anelize B. Monteiro, Anderson R.Vobornik Wolenski, André L. Christoforo
Departamento de Engenharia Civil, FACIEX, UNEMAT
78550-000, Sinop, MT
E-mail: ane.lize.eng@gmail.com, andersonunemat@gmail.com, alchristoforo@gmail.com

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos - MEF surgiu em 1955, como evolução da análise matricial de modelos reticulados, motivado pelo advento do computador e elaborado com o intuito de se projetar estruturas de modelos contínuos. O método pode ser considerado como uma técnica de gerar *funções de aproximação*, para *interpolar* deslocamentos, esforços, tensões e deformações ao longo do domínio do elemento, como pode ser observada no trabalho [1].

Para a resolução de problemas estruturais segundo o MEF, as funções de forma podem ser aplicadas diretamente à sua equação diferencial através do *Método dos Resíduos Ponderados*, ou a princípios energéticos, tais como o *Princípio dos Trabalhos Virtuais - PTV*, assim discutido no trabalho [2].

O deslocamento em problemas estruturais elásticos é tido como incógnita fundamental, obtido pela resolução de um sistema de equações lineares, (equação 1), sendo que sua construção fica em função da disposição da malha e dos nós dos elementos finitos na estrutura.

$$\{K\}.\{U\} = \{F\} \tag{1}$$

Da equação 1, $\{K\}$ representa a matriz de rigidez da estrutura, $\{U\}$ o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura e $\{F\}$, o vetor das forças equivalentes nodais da estrutura (desenvolvidos para ambos os elementos de barra apresentados neste trabalho segundo o PTV). A Figura 1.a apresenta a construção deste sistema de equações.

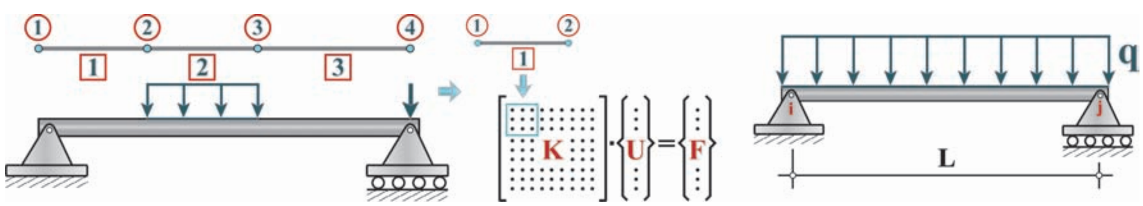

Figura 1: a) Malha de Elementos Finitos. b) Viga com carregamento uniforme.

Em se tratando de vigas, a maioria dos softwares livres de análise estrutural fundamentados no MEF utiliza um polinômio interpolador do terceiro grau, que garante a continuidade em deslocamentos entre os nós adjacentes da malha e da rotação, que é expressa pela derivada 1^a da função dos deslocamentos, para se aproximar o campo dos deslocamentos, das deformações, das tensões e dos esforços na estrutura. Os deslocamentos ***nodais*** calculados segundo este elemento de barra são exatos, e independem da forma do carregamento aplicado sobre a estrutura. Em particular, um carregamento muito encontrado nos problemas de dimensionamento, é o linearmente distribuído, assim como indica a Figura 1.b. Para este caso, as aproximações calculadas oferecem bons resultados na medida em que se aumenta o número de elementos finitos na malha, e isto acarreta na resolução de um sistema de equações lineares cuja ordem fica atrelada ao número de nós da mesma.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um elemento finito em vigas com o uso de um polinômio interpolador de grau cinco, com seis constantes a determinar. Além da garantia que o polinômio de grau três oferece, garante também a continuidade na curvatura, expressa pela 2^a derivada da função dos deslocamentos. Para se apresentar a eficiência do elemento finito proposto, comparado ao elemento finito com dois graus de liberdade por nó, foi-se utilizado um problema de vigas cuja solução exata da função de deslocamentos é comparada com as soluções aproximadas advindas de ambos os elementos de barra aqui contemplados, utilizando-se uma malha com apenas um elemento finito.

As equações (2) e (3) expressam as funções de interpolação $V_{ap}(x)$ para os elementos com quatro e seis graus de liberdade, respectivamente, onde $\phi_i(x)$ denota as funções de forma geradas pelo MEF, V_i, V_j as translações, θ_i, θ_j as rotações e c_i, c_j as curvaturas nos nós i e j do elemento.

$$V_{ap}(x) = V_i\phi_1(x) + \theta_i\phi_2(x) + V_j\phi_3(x) + \theta_j\phi_4(x) \tag{2}$$

$$V_{ap}(x) = V_i\phi_1(x) + \theta_i\phi_2(x) + c_i\theta_3(x) + V_j\phi_4(x) + \theta_j\phi_5(x) + c_j\theta_6(x) \tag{3}$$

Na Figura 2, tem-se o problema de viga utilizado para a verificação da eficiência de ambos os métodos aproximados, onde foram adotados: Módulo de elasticidade longitudinal $E = 15.000\ kN/cm^2$, Momento de inércia da seção da peça $I = 1.152\ cm^4$, Intensidade do carregamento distribuído $q = 1\ kN/cm$ e Comprimento da viga $L = 200\ cm$.

As Figuras 2.a e 2.b ilustram respectivamente as formas dos gráficos das funções de deslocamentos confrontando as soluções Exata $V(x)$, com Aproximada $V_{ap}(x)$, segundo o elemento finito com quatro graus de liberdade (aproximação A) e, solução exata com a aproximada segundo o elemento finito com seis graus de liberdade (aproximação B).

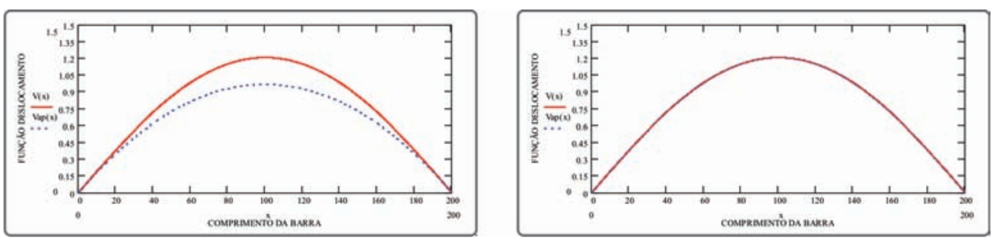

Figura 2: a) Aproximação A. b) Aproximação B.

Para avaliação da eficiência de ambas as aproximações, foi utilizado a equação (4) para mensurar o erro cometido. Para a aproximação A, foi alcançado um erro de $16,6667\%$, enquanto que, para a aproximação B, o erro foi considerado nulo.

$$Erro(\%) = 100\left|\frac{\int_0^L V(x)dx - \int_0^L V_{ap}(x)dx}{\int_0^L V(x)dx}\right| \tag{4}$$

Dessa forma, o elemento finito desenvolvido mostrou ser mais preciso do que o elemento finito com quatro graus de liberdade. Pelo erro encontrado, a aproximação B pode também ser tomada como solução exata do problema de vigas.

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, Deslocamento em Vigas e Análise da eficiência no cálculo do deslocamento.*

Referências

[1] A. L. Christoforo, "Influência das irregularidades da forma em peças de madeira na determinação do módulo de elasticidade longitudinal", Tese de Doutorado, EESC-USP, 2007.

[2] J. L. N. Góes, "Modelos teóricos para o dimensionamento de pontes com tabuleiro multicelular de madeira protendida", XXXI Jornadas Sud-americanas de Ingeniería Estructural, Mendonça, Argentina. Anais-CD-ROM, (2004).