

Solução Analítica de um Problema Difusivo-Advectivo Bidimensional através do Método de Separação de Variáveis

Carlos Friedrich Loeffler

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, UFES
29075-010, Vitória, ES

E-mail: carlosloeffler@bol.com.br

Jeovane Castro dos Santos

Centro Tecnológico Arivaldo Fontes, SENAI, Vitória, ES – Brasil
29052-121, Vitória, ES

E-mail: jeovane-castro@hotmail.com

***Resumo:** Este trabalho objetiva apresentar a solução analítica de um problema relacionado ao fenômeno da difusão-advecção em meios homogêneos bidimensionais sob regime permanente, expresso por uma equação diferencial parcial, através do método da separação de variáveis. De forma que se disponha de mais uma solução como referência, para avaliar a precisão numérica dos muitos métodos numéricos que se desenvolvem atualmente, quando aplicados a essa categoria de problemas. A solução não é simples nem se encontra disponível na literatura especializada. São apresentados os resultados de um conjunto de simulações, nas quais se aumentou a velocidade do escoamento, alterando o perfil de temperaturas nos contornos do volume de controle considerado.*

Introdução

São muitos os critérios utilizados na aferição de desempenho das técnicas de solução baseadas no emprego de computadores, comumente chamadas de técnicas numéricas ou técnicas aproximadas. A comparação com soluções já conhecidas, especialmente colhidas em problemas de campo, ou então a simulação com protótipos seria o ideal, mas, freqüentemente, a viabilidade e o custo desses empreendimentos são proibitivos. Usualmente, e cada vez mais, são comparados resultados obtidos por duas técnicas numéricas correlatas e verifica-se a concordância delas entre si. Outra tática, bem mais rigorosa, mas esquecida nos dias atuais, consiste na comparação das soluções numéricas com as correspondentes soluções matemáticas analíticas.

Sabe-se da enorme dificuldade em se obter soluções dessa natureza em problemas mais complexos, mas observa-se nitidamente um completo abandono no esforço de obtenção de tais soluções, bem como a falta de apreço por parte dos pesquisadores em realizar comparações dessa natureza, procurando tão somente avaliar o desempenho comparando métodos aproximados entre si. Embora a tática de comparação recíproca entre métodos seja válida, de acordo com os fundamentos da metodologia científica, tal procedimento deve ser precedido, sempre que possível, por avaliações nas quais os resultados numéricos sejam confrontados com o maior número de soluções analíticas correspondentes disponíveis.

No que tange especificamente aos problemas difusivos-advectivos, são muito poucas as soluções analíticas disponíveis, enquanto a maior parte dos métodos numéricos importantes apresenta diversas formulações alternativas voltadas para a sua modelagem, requerendo meios adequados de avaliação de desempenho.

Problema Proposto e Equações de Governo

As condições do problema são as seguintes: um volume de controle quadrado, sujeito a um campo de velocidade em duas direções e também submetido a valores de temperaturas e fluxos difusivos prescritos nas suas arestas, conforme apresentado na Figura 1 a seguir:

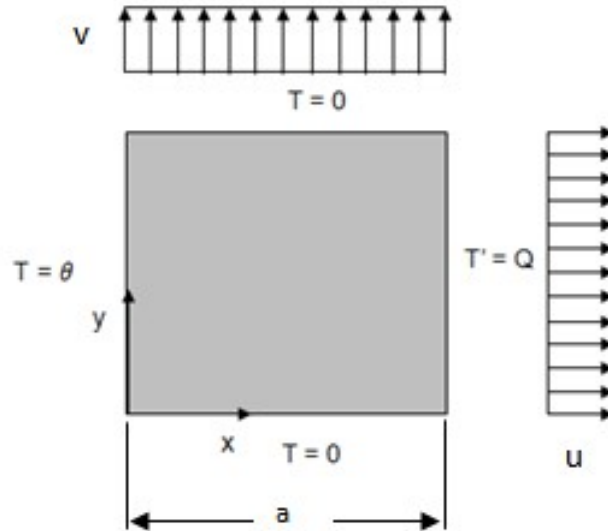


Figura 1: Características geométricas e condições de contorno do problema.

As equações da continuidade, do momento e da energia [3,6] são as equações básicas da termo-ciência que servem para gerar o modelo matemático de interesse. O efeito advectivo, ligado ao transporte de energia pelo escoamento, é gerado pela equação de momento e sua particularização pode seguir diversos modelos nos quais se associa o campo de velocidades ao campo de pressão. Considerando, para os interesses desse trabalho, que o campo de velocidade está bem definido, sua introdução na equação da energia permite correlacionar o processo simultâneo de condução e advecção, em regime permanente, para meios homogêneos isotrópicos bidimensionais, de modo que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

onde, T é a temperatura, variável básica, função de x e y . A velocidade na direção x , representada por u , e a velocidade na direção y , é representada por v .

O problema se resume então em encontrar a solução analítica da equação (1), consideradas as condições de contorno expostas na Figura 1. Embora haja vários métodos para achar soluções em problemas dessa natureza, tais como as técnicas de transformadas, é utilizado aqui o método de separação de variáveis (MSV) [1,4,5]. Em princípio, o MSV substitui a variável básica ou primal, que é função de duas variáveis, por um somatório de duas novas funções, cada uma delas função somente de x ou de y , ou seja:

$$T(x, y) = X_i(x)Y_i(y). \quad (2)$$

Entre as condições necessárias para aplicação do MSV exige-se a linearidade da equação diferencial parcial e homogeneidade nas condições de contorno. Entretanto, essa última condição pode ser relaxada contanto que se adicione uma nova função auxiliar $\gamma(x)$ que se responsabilize pela obediência às condições não homogêneas, ou seja:

$$T(x, y) = \gamma(x) + X_i(x)Y_i(y). \quad (3)$$

A idéia básica consiste em determinar $\gamma(x)$, função apenas de uma variável, de tal forma que o produto das duas funções satisfaça uma equação de derivadas parciais homogêneas e condições de contorno também homogêneas. A substituição da equação (3) na equação de governo, equação (1), resulta em:

$$\left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - u \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} Y_i(y) - u \frac{\partial X_i}{\partial x} Y_i(y) \right] = - \left[\frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} X_i(x) + v \frac{\partial Y_i}{\partial y} X_i(x) \right]. \quad (4)$$

A função auxiliar $\gamma(x)$ deverá se incumbir de obedecer às condições de contorno não homogêneas, de modo que se apresentam duas equações distintas:

$$\begin{cases} \gamma'' - \mathbf{u}\gamma' = 0 \\ \frac{X_i''}{X_i} - \mathbf{u}\frac{X_i'}{X_i} = \mathbf{v}\frac{Y_i'}{Y_i} - \frac{Y_i''}{Y_i} = -K_i^2. \end{cases}$$

Resolvendo a equação que se encarrega das condições de contorno não-homogêneas, tem-se:

$$\gamma'' - \mathbf{u}\gamma' = 0 \quad \therefore \quad (\lambda^2 - \mathbf{u}\lambda)e^{\lambda x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda(\lambda - \mathbf{u}) = 0$$

sendo assim, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \mathbf{u}$, a solução fica:

$$\gamma(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad \therefore \quad \gamma(x) = A + Be^{\mathbf{u}x}.$$

Aplicando as condições de contorno:

$$x = 0 \quad \therefore \quad \gamma(0) = \theta \quad \therefore \quad \theta = A + B \quad \therefore \quad A = \theta - B$$

$$x = a \quad \therefore \quad \gamma'(a) = Q \quad \therefore \quad Q = \mathbf{u}Be^{\mathbf{u}a} \quad \therefore \quad B = \frac{Q}{\mathbf{u}e^{\mathbf{u}a}}.$$

Reordenando, tem-se:

$$\gamma(x) = \frac{Q}{\mathbf{u}e^{\mathbf{u}a}} [e^{\mathbf{u}x} - 1] + \theta. \quad (5)$$

Resolvendo a equação não-homogênea para X, agora sujeita às condições de contorno homogêneas:

$$\frac{X_i''}{X_i} - \mathbf{u}\frac{X_i'}{X_i} = -K_i^2 \quad \therefore \quad X_i'' - \mathbf{u}X_i' + X_i K_i^2 = 0$$

$$(\lambda^2 - \mathbf{u}\lambda + K_i^2)e^{\lambda x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda = \frac{\mathbf{u}}{2} \pm \frac{\sqrt{\mathbf{u}^2 - 4K_i^2}}{2},$$

fazendo:

$$p = \frac{\mathbf{u}}{2} \quad e \quad q_i = \sqrt{K_i^2 - \frac{\mathbf{u}^2}{4}}, \quad \forall (\mathbf{u} < 2K_i),$$

então:

$$X_i(x) = e^{px} [C_i \cos(q_i x) + D_i \sin(q_i x)].$$

Aplicando-se as condições de contorno:

$$T(0, y) = \theta \quad \therefore \quad \theta = \gamma(0) + X_i(0)Y_i(y) \quad \therefore \quad \theta = \theta + X_i(0)Y_i(y),$$

naturalmente, as condições são homogêneas, de modo que:

$$0 = X_i(0)Y_i(y) \quad \therefore \quad X_i(0) = 0 = e^0 [C_i \cos(0) + D_i \sin(0)] \quad \therefore \quad C_i = 0$$

$$X_i(x) = e^{px} D \sin(qx)$$

$$T'(a, y) = Q \quad \therefore \quad Q = \gamma'(a) + X_i'(a)Y'(y) \quad \therefore \quad Q = Q + X_i'(a)Y'(y)$$

$$0 = X_i'(a)Y_i(y) \quad \therefore \quad X_i'(a) = 0 = pe^{pa} D_i \sin(q_i a) + e^{pa} D_i q_i \cos(q_i a)$$

$$0 = \frac{\mathbf{u}}{2} \sin(q_i a) + q_i \cos(q_i a) \quad \therefore \quad \frac{\mathbf{u}}{2} \sin(q_i a) = -q_i \cos(q_i a) \quad \text{ou} \quad \tan(q_i a) = -\frac{2}{\mathbf{u}} q_i.$$

Para se encontrar os zeros desta função transcendental, comumente chamada de equação característica, foi usado um algoritmo que é uma combinação do método da bissecção e interpolação quadrática inversa. O gráfico da função é o mostrado na Figura 2 a seguir:

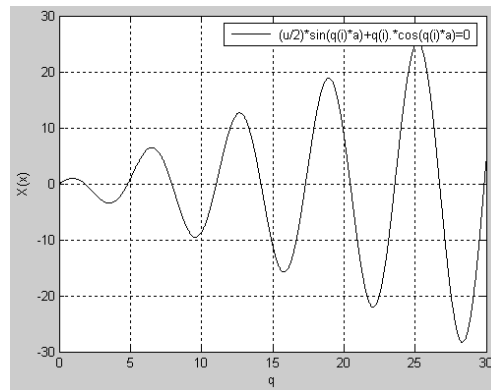


Figura 2: Comportamento da função característica.

De posse dos valores dos q_i , encontram-se os valores para K_i da seguinte forma:

$$q_i = \sqrt{K_i^2 - \frac{u^2}{4}} \quad \therefore \quad q_i^2 = K_i^2 - \frac{u^2}{4}. \quad (6)$$

Resolvendo a equação não-homogênea, para Y:

$$vY_i' - Y_i'' = -K_i^2 Y_i \quad \therefore \quad Y_i'' - vY_i' - K_i^2 Y_i = 0.$$

Os autovalores associados a essa equação podem ser retirados em função dos valores de K_i e q_i determinados anteriormente, ou seja:

$$(\lambda_i^2 - v\lambda - K_i^2)e^{\lambda_i y} = 0 \quad \therefore \quad \lambda_i = \frac{v}{2} \pm \frac{\sqrt{v^2 + 4K_i^2}}{2}, \quad (7)$$

uma vez que os autovalores são reais, tem-se então uma expressão das autofunções de Y, da seguinte forma:

$$Y_i(y) = E_i e^{\lambda_i y} + F_i e^{-\lambda_i y}.$$

Aplicando as condições de contorno:

$$T(x, 0) = 0 \quad \therefore \quad \gamma(x) + X_i(x)Y_i(0) = 0 \quad \therefore \quad X_i(x)Y_i(0) = -\gamma(x),$$

sendo que:

$$X_i(x) = e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) \quad \text{e} \quad \gamma(x) = \frac{Q}{u e^{ua}} [e^{ux} - 1] + \theta$$

então, tem-se:

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) [E_i + F_i] = \frac{Q}{u e^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta, \quad (8)$$

sabendo-se que:

$$T(x, a) = 0 \quad \therefore \quad \gamma(x) + X_i(x)Y_i(0) = 0 \quad \therefore \quad X_i(x)Y_i(0) = -\gamma(x)$$

da mesma forma, tem-se:

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) \left[E_i e^{1\lambda_i a} + F_i e^{2\lambda_i a} \right] = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta. \quad (9)$$

Resolvendo-se as equações (8) e (9), encontra-se:

$$Y_i(y) = F_i \left[\frac{(1 - e^{2\lambda_i a})}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} e^{1\lambda_i y} + e^{2\lambda_i y} \right] \quad (10)$$

de posse desta relação, volta-se a qualquer uma das duas equações anteriores, preferencialmente a mais simples, de modo que:

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) F_i \left[\frac{e^{1\lambda_i a} - e^{2\lambda_i a}}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} \right] = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta$$

fazendo-se:

$$M_i = \frac{e^{1\lambda_i a} - e^{2\lambda_i a}}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} \quad e \quad G_i = F_i D_i. \quad (12)$$

De posse das equações (6), (7) e (11), calculam-se coeficientes q_i , K_i^2 , $1\lambda_i$, $2\lambda_i$, e M_i , para diversos valores das componentes de velocidade u e v . Daí, com alguma manipulação algébrica, chega-se a:

$$G_i M_i \operatorname{sen}(q_i x) = e^{-\frac{u}{2}x} \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] - \frac{Q}{ue^{ua}} e^{\frac{u}{2}x}. \quad (13)$$

Não é viável desenvolver o lado direito da equação (13) em Série de Fourier [2], pois não é conhecido o intervalo de ortogonalidade. Deve-se então multiplicar a equação (13) pelos vários homônimos $\operatorname{sen}(q_i x)$ e resolver o sistema de equações acoplado. Assim:

$$\int e^{cx} \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c \cdot \operatorname{sen}(bx) - b \cdot \cos(bx)]$$

$$\int_0^a e^{\frac{u}{2}x} \operatorname{sen}(q_i x) dx = \left[\frac{e^{\frac{u}{2}x}}{\frac{u^2}{4} + q_i^2} \left(\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_i x) - q_i \cdot \cos(q_i x) \right) \right]_0^a$$

$$\int_0^a e^{\frac{u}{2}x} \operatorname{sen}(q_i x) dx = \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_i^2} \left[e^{\frac{u}{2}a} \left(\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_i a) - q_i \cdot \cos(q_i a) \right) + q_i \right]$$

logo, tem-se:

$$\int_0^a G_i M_i \operatorname{sen}(q_i x) \cdot \operatorname{sen}(q_m x) dx = \frac{-Q}{ue^{ua}} \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right\} \cdot \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cdot \cos(q_m a) \right] + q_m \right\} +$$

$$+ \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] \left(\frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right) \left\{ e^{-\frac{u}{2}a} \left[-\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cdot \cos(q_m a) \right] + q_m \right\}.$$

Do lado esquerdo, onde se encontra G_i , tem-se, para $m = 1$:

$$\int_0^a G_1 M_1 \operatorname{sen}(q_1 x) \operatorname{sen}(q_1 x) dx + \int_0^a G_2 M_2 \operatorname{sen}(q_2 x) \operatorname{sen}(q_1 x) dx + \dots + \int_0^a G_5 M_5 \operatorname{sen}(q_5 x) \operatorname{sen}(q_1 x) dx =$$

Do lado direito:

$$= \frac{-Q}{ue^{ua}} \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_1^2} \right\} \cdot \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[\frac{u}{2} \cdot \text{sen}(q_1 a) - q_1 \cdot \text{cos}(q_1 a) \right] + q_1 \right\} +$$

$$+ \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] \left(\frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_1^2} \right) \left\{ e^{-\frac{u}{2}a} \left[-\frac{u}{2} \cdot \text{sen}(q_1 a) - q_1 \cdot \text{cos}(q_1 a) \right] + q_1 \right\}.$$

Quando $m = i$:

$$\int_0^a \text{sen}^2(q_m x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2q_m x)}{4q_m} \right]_0^a = \frac{a}{2} - \frac{\text{sen}(2q_m a)}{4q_m}.$$

Quando $m \neq i$:

$$\int_0^a \text{sen}(q_i x) \text{sen}(q_m x) dx = \left[\frac{\text{sen}[(q_i - q_m)x]}{2(q_i - q_m)} - \frac{\text{sen}[(q_i + q_m)x]}{2(q_i + q_m)} \right]_0^a$$

$$= \frac{\text{sen}[(q_i - q_m)a]}{2(q_i - q_m)} - \frac{\text{sen}[(q_i + q_m)a]}{2(q_i + q_m)}.$$

Com a expressão de G_i , pode-se montar a função de distribuição de temperatura, da seguinte forma:

$$T(x, y) = \gamma(x) + X_i(x)Y_i(y),$$

onde:

$$\gamma(x) = \frac{Q}{ue^{ua}} [e^{ux} - 1] + \theta \quad \therefore \quad X_i(x) = e^{px} D_i \text{sen}(q_i x) \quad \therefore \quad Y_i(y) = F_i \left[\frac{(1 - e^{2\lambda_i a})}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} e^{1\lambda_i y} + e^{2\lambda_i y} \right].$$

Particularizando as expressões anteriores considerando que $a = 1$, $Q = e^{ua}$ e $\theta = 1$, encontra-se:

$$T(x, y) = \left\{ \left[\frac{e^{ux} - 1}{u} \right] + 1 \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{\frac{u}{2}x} \text{sen}(q_i x) \left\{ \left[\frac{(1 - e^{2\lambda_i a})}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} e^{1\lambda_i y} + e^{2\lambda_i y} \right] \right\}. \quad (14)$$

Para obter-se o fluxo de calor, basta derivar a função de distribuição de calor. Para as arestas verticais:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = e^{ux} + G_i \left\{ \left[\frac{(1 - e^{2\lambda_i a})}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} e^{1\lambda_i y} + e^{2\lambda_i y} \right] \right\} \left\{ e^{\frac{u}{2}x} \left[\frac{u}{2} \text{sen}(q_i x) + q e^{\frac{u}{2}x} \text{cos}(q_i x) \right] \right\} = e^{ux}. \quad (15)$$

equação característica

Para as arestas horizontais:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = G_i e^{\frac{u}{2}x} \text{sen}(q_i x) \left\{ \left[\frac{(1 - e^{2\lambda_i a})}{(e^{1\lambda_i a} - 1)} 1\lambda_i e^{1\lambda_i y} + 2\lambda_i e^{2\lambda_i y} \right] \right\}. \quad (16)$$

De posse das expressões da temperatura e do fluxo de calor equação (14) e (15) respectivamente, podem-se traçar as curvas da distribuição de temperatura para as diferentes velocidades de fluidos sobre a placa.

Resultados

Para ilustrar, foi gerada a solução analítica correspondente para as temperaturas na borda vertical direita, para dois valores de velocidade $u = v$, conforme pode ser observado na Figura 3 a seguir.

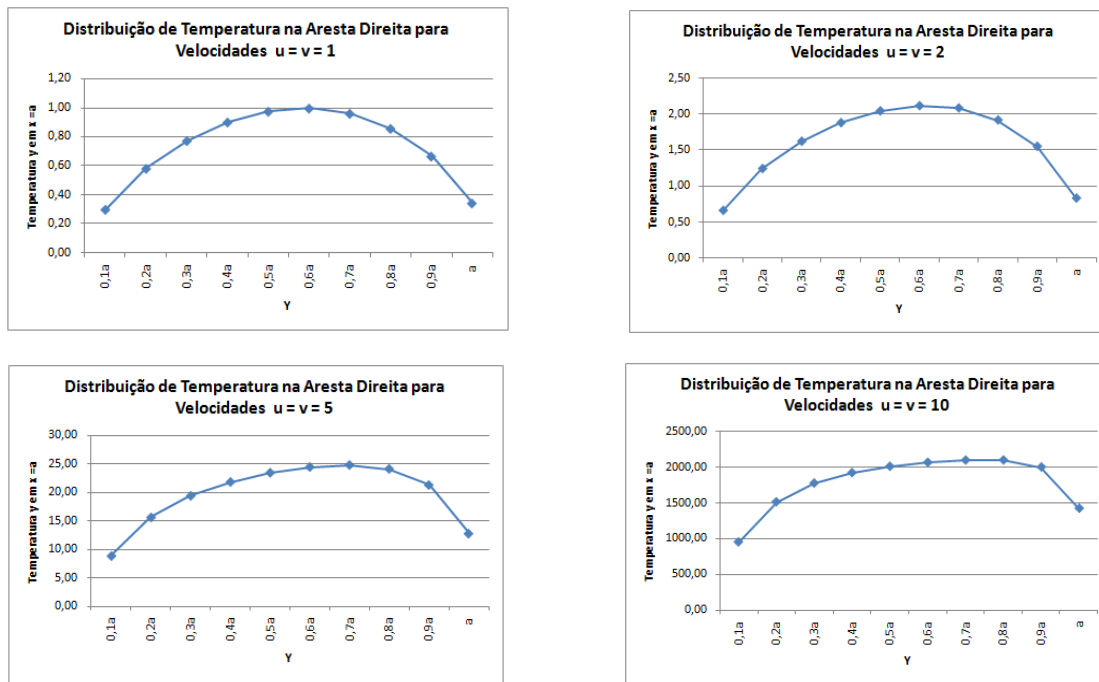


Figura 3: Comportamento da temperatura com a velocidade na aresta vertical direita.

Conclusões

Problemas governados por equações diferenciais parciais, mesmo lineares, são de difícil solução analítica. Sendo que, muitas delas representam importantes problemas de física, com amplas aplicações na engenharia, e desse modo, a disponibilidade de um maior número de problemas-teste para avaliação de desempenho colabora com o processo de desenvolvimento de formulações numéricas cada vez mais eficazes, pois oferece uma base mais segura para comparação de resultados.

Com a geração dessa solução analítica, podem ser feitas análises com intenção de validar resultados de modelos numéricos, especialmente ampliando a velocidade de escoamento e fazendo preponderar o fenômeno advectivo sobre o difusivo. Por questões de espaço, não foram incluídas as tabelas nas quais os parâmetros auxiliares foram levantados, para diversos valores de velocidade do escoamento.

O MSV mostrou ser uma técnica viável e eficaz para solução de casos similares a esse, apesar dos algebrismos envolvidos serem extensos. Ressalta-se, na comparação com casos simples apresentados na literatura, a impossibilidade de se estabelecer uma expressão analítica para a solução da equação característica, cujas raízes, curiosamente induzem a um sistema matricial quase-ortogonal, conforme pode ser observado nos valores referentes às integrais calculadas.

Referências

1. W. Kaplan, "Advanced Calculus", Addison-Wesley, Massachusetts, 1970.
2. E. Kreizig, "Matemática Superior", LTC, Rio de Janeiro, 1976.
3. M.N. Ozisik, "Transferência de Calor". Editora Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1990.
4. H. Sagan, "Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics", John Wiley & Sons, New York, 1963.
5. G. Stephenson, "Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais", Edgard Blücher, São Paulo, 1975.
6. F.M.White, "Fluid Mechanics", McGraw-Hill Int., Singapore, 1986.