ISSN 1984-820X

Estudo Numérico do Decaimento da Energia de uma Viga com Memória na Fronteira

Daniel S. Martins* Marcus P. C. Rocha† Valcir C. Farias‡

Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística, ICEN, UFPA,

Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá, 66.065-900, Belém, PA

E-mail: danielfermat@hotmail.com, valcir@ufpa.br, mrocha@ufpa.br

RESUMO

Objetivamos verificar numericamente o decaimento da energia de uma viga com memória na fronteira, cujo modelo é representado pela seguinte equação diferencial parcial.

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,T) \tag{1}$$

com condições de fronteira

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_x(0,t) = 0, && (2)\\ u_x(L,t) &= \int_0^t g_1(t-s)\,(u_{xx}(L,s) + \rho_1\, u_x(L,s))\,ds, && (3)\\ u(L,t) &= \int_0^t g_2(t-s)\,(u_{xxx}(L,s) - u_x(L,s) - \rho_2\, u(L,s))\,ds, && (4)\end{aligned}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{5}$$

Em que $u(x,t)$ é o deslocamento transversal da viga no ponto $x \in [0,L]$ e no instante t. As funções g_1 e g_2 são as funções relaxamento e ρ_1 e ρ_2 são constantes positivas.

O problema (1)-(5) representa o movimento vibratório de uma viga, com condição de fronteira viscoelástica. Neste problema, temos uma viga com uma das extremidades fixas e a outra extremidade "livre", submetida a uma condição de fronteira do tipo memória, representada pelo termo convolutivo. O termo memória refere-se ao fato de que cada estado do sistema, em determinado momento, depende dos estados anteriores (efeito memória).

Utilizaremos o resultado obtido em [4], que mostrou a atenuação do movimento da viga no decorrer do tempo, para verificarmos se o comportamento numérico da solução é semelhante ao comportamento algébrico de forma a validar a nossa aproximação. É preciso ressaltar que nem sempre o comportamento numérico é semelhante ao comportamento algébrico, pois, afinal estamos substituindo um modelo contínuo por um modelo discreto. Nosso principal objetivo, portanto, é mostrar que nossa aproximação representa adequadamente a solução do problema, no que diz respeito ao decaimento da energia.

Uma das vantagens deste trabalho é que por não se conseguir exibir uma solução exata para o problema (1)-(5), fica sendo viável apenas uma aproximação por métodos numéricos. Por se tratar de uma equação diferencial parcial de alta ordem, há grande dificuldade para aproximar a solução da mesma, sendo poucos os trabalhos existentes na literatura a esse respeito.

*Aluno do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME/UFPA

†Professor do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME/UFPA

‡Professor do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME/UFPA

Equações diferenciais parciais com fronteira viscoelástica, como o problema (1)-(5), já foram estudadas antes. Um exemplo de trabalho relacionado sobre existência, unicidade e comportamento assintótico para solução de equações como essas pode ser visto em [2].

Observe que a atenuação do movimento da corda é devido a uma “perda”de energia da viga. Então é suma importância estudar numericamente o funcional da energia para esse problema que é dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t) + u_{xx}^2(x,t))\,dx$$

Verificaremos que tal sistema é dissipativo com convenientes hipóteses para g_1, g_2.

Para estudarmos numericamente o decaimento da energia utilizaremos uma aproximação pelo Método de Diferenças Finitas (ver [3]). A energia discreta será aproximada por

$$\begin{aligned} E\left(t_j\right) \quad = \quad & \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(u_{i,j+1}-u_{i,j}\right)^2}{k^2} + \frac{\left(u_{i+1,j}-u_{i,j}\right)\left(u_{i,j}-u_{i-1,j}\right)}{h^2} + \right. \\ & \left. \frac{\left(u_{i+2,j}-2\,u_{i+1,j}+u_{i,j}\right)\left(u_{i,j}-2\,u_{i-1,j}+u_{i-2,j}\right)}{h^4}\right] \end{aligned}$$

Utilizaremos o software MATLAB 7.6 para a implementação do problema. Para uma apresentação da linguagem do MATLAB o leitor pode consultar a referência [1].

Durante a simulação da solução encontramos o seguinte comportamento

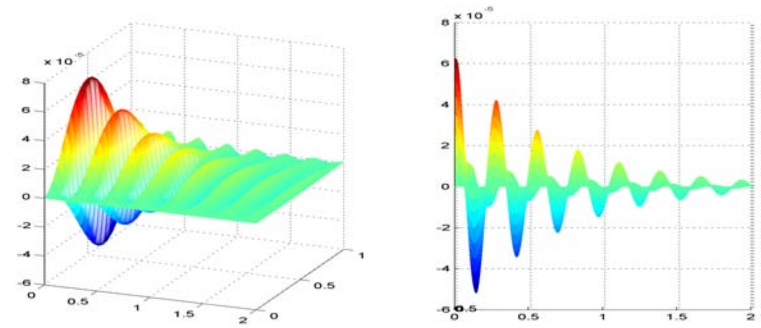

Figura 1: Viga com memória na fronteira

Dessa forma, temos a evidência de que a energia do sistema irá diminuir no decorrer do tempo, pois o movimento da viga tende a atenuar.

Futuramente, esperamos comparar nossos resultados com outros métodos de solução numérica para equações diferenciais, como por exemplo, o Método de Elementos Finitos.

Palavras-chave: *Equação da Viga, Efeito Memória, Método de Diferenças Finitas, Energia, Convergência, Estabilidade Numérica.*

Referências

[1] Chapman, Stephen J., “Programação em MATLAB para engenheiros”; tradução técnica Flávio Soares Correa da Silva, São Paulo, Thomson Learning, 2006.

[2] L. Mauro, Asymptotic behavior of solution to wave equation with a memory condition at the boundary, Electronic Journal of Differential Equation. 73(2001) 1-11.

[3] NOVAIS, AMÉLIA, *Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais*, SBMAC, 2003.

[4] MARTINS, Daniel da Silva ; ROCHA, M. P. C. ; FARIAS, V. J. da C. ; TAVARES, H. R. ; SILVA, L. R. . Estudo Numérico de Uma Equação da Viga Com Memória na Fronteira. 2008. XXXI CNMAC (Apresentação de Trabalho/Congresso).