 ISSN 1984-820X

Considerações Relativas às Integrações Singulares e Hiper-Singulares no Método dos Elementos de Contorno aplicado à Equação de Laplace em Duas Dimensões

Carlos F. Loeffler
UFES – Departamento de Engenharia Mecânica
Campus Goiabeiras – Vitória CEP 29075-910
E-mail: carlosloeffler@bol.com.br

Enilene Regina Lovatte
IFES - Coordenadoria do Curso Técnico em Ferrovias
CEP 29145-440– Campus Cariacica - ES
E-mail: enilene@cefetes.br

Humberto Barroncas Corrêa
IFES – Coordenadoria do Curso Técnico em Mecânica
CEP 29040-780 Campus Vitória - ES
E-mail: barroncas@cefetes.br

Palavras – Chave: Método dos Elementos de Contorno, Formulação Singular, Formulação Hiper-singular.

Introdução

Atualmente, devido aos grandes avanços nas técnicas computacionais, é possível obter-se, em muitas situações, a modelagem matemática de importantes problemas de engenharia, física e outras ciências aplicadas. Uma vez que as soluções analíticas de problemas podem somente ser obtidas para poucos casos simples, cada vez são empregadas técnicas numéricas de solução, dentre os quais destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma das mais efetivas técnicas numéricas disponíveis para a resolução das equações diferenciais resultantes de uma modelagem matemática, cuja principal característica é a ausência da discretização do domínio do problema. O MEC se baseia na obtenção de uma equação integral numa forma dita inversa, expressa, unicamente, em termos de integrais de contorno e funções de ponto. Especialmente em problemas expressos por operadores diferenciais parciais auto-adjuntos, o MEC tem apresentado resultados com elevada precisão, conforme mostra a literatura [1,2].
Em função dos avanços na modelagem matemática e o aumento da capacidade dos computadores em armazenar e processar dados, todas as modernas técnicas numéricas discretas experimentam desenvolvimentos e adaptações para que consigam o melhor desempenho com generalidade. O MEC não foge a essa regra e o caso da formulação hiper-singular (FHS) [3,4] é típico: a FHS foi gerada para se obter mais precisão no cálculo de derivadas das variáveis básicas ou primais, o que levou a uma formulação integral de ordem mais elevada do que a formulação integral clássica do método (FSC). Em problemas de elasticidade, por exemplo, é importante a precisão no cálculo de derivadas do potencial no contorno, valores esses que somente podem ser obtidos com precisão pela FHS. Outras aplicações podem ser colhidas na área de termo-fluidos, como nos casos em que se deseja identificar o campo de velocidades a partir de um potencial de pressão, pois é indispensável conhecer-se tanto as componentes de velocidade normal quanto tangencial.

Objetivo

Nas formulações convencionais do Método dos Elementos de Contorno, uma atenção especial deve ser dada às integrações singulares que aparecem nos núcleos das integrais de contorno, típicas do método. Esta atenção se redobra no caso de formulações hiper-singulares. O

tratamento adequado destas integrais mostra que são convergentes no sentido do Valor Principal de Cauchy e podem ter seu tratamento simplificado diante de alguns procedimentos ligados à discretização e ao posicionamento dos nós funcionais típicos do Método dos Elementos de Contorno.
O objetivo deste trabalho é apresentar as formulações integrais singulares e hiper-singulares para a Equação de Laplace e seu devido tratamento numérico na forma mais simplificada, considerando as propriedades dos núcleos e da ordem dos elementos de contorno empregados na discretização do contorno.

Equação Integral Hiper-Singular do MEC

A formulação hiper-singular pode ser deduzida a partir da derivação da equação integral [2] com relação à direção normal tomada no ponto fonte ξ, situado internamente, ou seja:

$$\frac{du(\xi)}{dn(\xi)} = q(\xi) = \int_\Gamma \frac{\partial u^*(\xi;X)}{\partial n} q(X)d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial q^*(\xi;X)}{\partial n} u(X)d\Gamma = \int_\Gamma q^*(\xi;X)q(X)d\Gamma - \int_\Gamma p^*(\xi;X)u(X)d\Gamma \quad (1)$$

O núcleo hiper-singular é dado por:

$$p^*(\xi;X) = (1/2\pi r^2)\left\{2[r,_i(X)n_i(\xi)][r,_j(X)n_j(X)] - n_i(\xi)n_i(X)\right\} \quad (2)$$

A implementação numérica da equação (1) para pontos internos num pós-processamento é relativamente simples, mas a utilização direta dessa equação para determinação de valores de contorno requer um tratamento matemático especial, seguido de uma cuidadosa implementação numérica, que avalie corretamente as integrais singulares resultantes.

Conclusões

Embora a apresentação da FHS tenha sido feita há mais de duas décadas e alguns importantes trabalhos tenham sido desenvolvidos nessa área, aspectos importantes da sua formulação e interessantes particularidades numéricas não estão suficientemente difundidos, estando acessíveis apenas em artigos bastante especializados. Esse trabalho apresenta um detalhamento da formulação matemática e de procedimentos de implementação numérica, bastante peculiares à metodologia hiper-singular. O trato com singularidades de ordem superior pode ser feito numericamente ou analiticamente, este último modo sendo bastante acessível no caso de elementos retilíneos. Para os casos gerais, deve ser ressaltada a necessidade da correta obediência ao senso de integração especial ditado pelo VPC, quando descontinuidades e segmentos de diferentes valores são integrados no entorno dos pontos fonte singulares.

Referências

[1] C.A. Brebbia, J.C. Telles, and L.C. Wrobel, “Boundary Element Techniques”, Springer Verlag, Berlin (1984).
[2] C.A. Brebbia, “The Boundary Element Method for Engineers”, Pentech Press, London, 1978.
[6] A.A.Prado, “Uma Formulação Hiper-singular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais”, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, engenharia Civil, Rio de Janeiro,1991.
[7] J.C.F. Telles,. A.A.Prado, Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap. 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London, 1993.