

# Um Estudo da Evolução Diferencial na Otimização Estrutural

**Eduardo K. Silva,**      **Helio J. C. Barbosa,**

Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC,

Petrópolis, RJ

E-mail: krempser@lncc.br,    hcbm@lncc.br,

**Resumo:** *Evolução Diferencial é uma metaheurística simples e eficiente, baseada em população, para otimização global sobre espaços contínuos. Como em outras técnicas evolucionistas, a Evolução Diferencial não proveu em sua formulação original a manipulação de restrições. Mas diversas modificações do algoritmo original tem sido propostas para a expansão do seu domínio de aplicação, obtendo assim, importantes resultados na otimização restrita e sobre variáveis contínuas e discretas. Esse trabalho apresenta um estudo sobre os principais aperfeiçoamentos da técnica quanto à sua aplicação em problemas de otimização estrutural com restrições*

**Palavras-chave:** *Evolução Diferencial, Otimização Estrutural, Metaheurística*

## 1 Introdução

O sucesso da Evolução Diferencial (Differential Evolution - DE) e sua simplicidade geraram um grande número de trabalhos onde variantes foram propostas visando ampliar sua utilização ou mesmo buscando um melhor desempenho. A DE é um algoritmo evolucionista, baseado em população, proposto originalmente para problemas irrestritos em espaços de busca contínuos. Dessa forma, novas propostas visam a aplicação do algoritmo em espaços discretos ou mistos (discretos-contínuos) e principalmente sua aplicação à problemas restritos, tendo em vista sua importância prática.

Esse trabalho avalia diferentes variantes e adaptações propostas para a aplicação da DE em problemas práticos da engenharia, de forma a oferecer um estudo condensado de tais modificações, bem como a avaliação do impacto de cada uma sobre os problemas tratados. São avaliadas também propostas que visam a adaptação dos parâmetros do algoritmo durante o processo evolutivo.

## 2 Breve Descrição da Evolução Diferencial

A proposta original da DE por Storn e Price [16] visava a otimização global sobre espaços contínuos. O Algoritmo a seguir, retirado de [7], mostra um pseudo-código para a variação DE/rand/1/bin. Nesse modelo os indivíduos envolvidos no processo de mutação são selecionados aleatoriamente. A população inicial é gerada aleatoriamente no início do processo e a evolução dos indivíduos é realizada pelos operadores de mutação e recombinação. Para isso três indivíduos são selecionados (a forma de seleção destes indivíduos indica o vetor base da mutação,  $x_{r3,i,G}$ , e portanto, altera-se de acordo com a variante utilizada) e para cada variável (dimensão) um operador é aplicado sobre os três indivíduos selecionados. O operador é basicamente a adição ao indivíduo base da diferença entre os outros dois indivíduos.

Cada novo valor gerado é armazenado em um indivíduo temporário ( $u_{i,j,G+1}$ ) e, ao final de sua completa geração, o mesmo é comparado ao indivíduo corrente da população (indicado na linha 17 para um problema de minimização). O melhor indivíduo é levado à população da próxima geração.

```

1: procedure DE(POP, GEN, F, CR)
2:   G = 0
3:   CREATERANDOMINITIALPOPULATION(POP)
4:   Evaluate  $f(\bar{x}_{i,G})$   $\triangleright \forall i, i = 1, \dots, POP$ 
5:   for G = 1 : GEN do
6:     for i = 1 : POP do
7:       SELECTRANDOMLY( $r_1, r_2, r_3$ )  $\triangleright r_1 \neq r_2 \neq r_3$ 
8:       jRand = RANDINT(1, D)  $\triangleright D$  é a dimensão do problema
9:       for j = 1 : D do
10:        if (RAND(0, 1) < CR or j = jRand) then
11:           $u_{i,j,G+1} = x_{r_3,j,G} + F(x_{r_1,j,G} - x_{r_2,j,G})$ 
12:        else
13:           $u_{i,j,G+1} = x_{i,j,G}$ 
14:        end if
15:      end for
16:    end for
17:    if ( $F(u_{i,G+1}) \leq F(x_{i,G})$ ) then
18:       $\bar{x}_{i,G+1} = u_{i,G+1}$ 
19:    else
20:       $\bar{x}_{i,G+1} = \bar{x}_{i,G}$ 
21:    end if
22:  end for
23: end procedure

```

Figura 1: Algoritmo DE/rand/1/bin

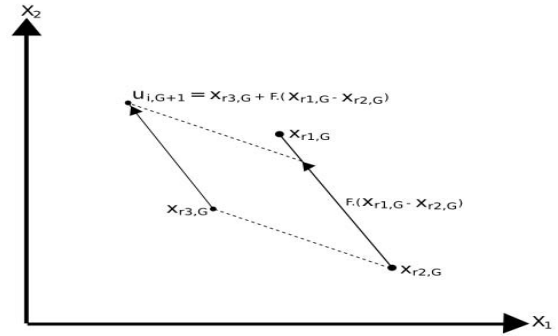


Figura 2: Operador de mutação

O operador de recombinação é aplicado de acordo com uma probabilidade CR, quando então o novo valor para a variável é gerado por meio da mutação, caso contrário o valor pertencente ao indivíduo corrente da população é utilizado. O valor  $jRand$  é selecionado para garantir que ao menos uma variável sofra a mutação.

Um ponto importante no algoritmo é o parâmetro  $F$ , o qual determina a amplitude da mutação, ponderando a diferença realizada. A Figura 2 mostra graficamente um exemplo de aplicação do operador de mutação sobre os indivíduos (vetores).

Como antecipado no início desta seção as variantes da evolução diferencial podem ser identificadas por uma notação dada por DE seguida pelo número de diferenças envolvidas na mutação, bem como o mecanismo utilizado na seleção dos pais (por exemplo, “rand”, para aleatório) e o mecanismo de recombinação utilizado (“bin” identifica a aplicação binomial da recombinação, sendo utilizada na maioria dos trabalhos). Dessa forma, algumas das variantes são diretamente identificadas por essa nomenclatura.

As principais variantes da DE modificam a forma em que os indivíduos são selecionados para participarem da mutação, deixando de serem simplesmente aleatórios, alterando basicamente a linha 11 do algoritmo apresentado. Nesse trabalho são consideradas as seguintes variantes, além da variante original (DE/rand/1/bin):

**DE/best/1/bin** Proposto por [10] modifica o modelo inicial apenas por utilizar como vetor base da mutação o melhor indivíduo da população. Dessa forma a operação é descrita por:  $u_{j,i} = x_{j,best} + F_j(x_{j,r_1} - x_{j,r_2})$ , com  $x_{j,best}$  o indivíduo de melhor aptidão da população na geração corrente e  $r_1$  e  $r_2$  indivíduos selecionados aleatoriamente

**DE/target-to-best/1/bin** Essa variante, descrita em [10], propõe a utilização conjunta do melhor indivíduo da população e do vetor alvo (indivíduo que será usado na comparação com o gerado após a mutação). Assim, combina-se essas duas informações, ampliando o operador de mutação:  $u_{j,i} = x_{j,i} + F_j(x_{j,best} - x_{j,i}) + F(x_{j,r_1} - x_{j,r_2})$

**Variante proposta em [8]** Essa variante não recebe uma identificação, mas possui semelhança com o modelo anterior, diferenciando-se pelo fato de utilizar como vetor base um indivíduo selecionado aleatoriamente e utilizar diferentes valores para cada combinação envolvida, ou seja, dá diferentes pesos  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  a cada parcela na operação. A formulação é descrita por:  $u_{j,i} = x_{j,r_3} + F_\alpha(x_{j,best} - x_{j,r_2}) + F_\beta(x_{j,r_2} - x_{j,r_1})$

Outras variantes podem ser encontrados em [8, 13].

Já para a aplicação da DE em problemas mistos (com variáveis discretas e contínuas), ampliando portanto o seu domínio de aplicação, a técnica empregada na quase totalidade dos casos é um simples arredondamento do valor obtido para o valor discreto mais próximo [6].

### 3 Configuração dos Parâmetros

Um dos pontos mais estudados para o aperfeiçoamento da DE está relacionado à adaptação dos seus parâmetros, em especial a amplitude da diferença utilizada na operação de mutação ( $F$ ). Dessa forma, o parâmetro  $F$  deixa de ser previamente fixado e é obtido no decorrer do processo. Além do valor de  $F$ , alguns estudos (como em [15, 12]) propõem também a adaptação de  $CR$ , do número de indivíduos na população e até mesmo da variante da DE utilizada no processo. Outra possibilidade é a geração aleatória de  $F$  para cada geração, como proposto em [5].

Em [15] os parâmetros  $F$  e  $CR$  são calculados dinamicamente para cada geração ( $t$ ) e para cada indivíduo ( $i$ ) seguindo uma distribuição de Cauchy:

$$F_{i,t+1} = \begin{cases} C(\mu, \delta_{i,t+1}), & \text{se } rand_1 \leq \pi_1 \\ C(\mu, \delta_{i,t}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\delta_{i,t+1} = \delta_l + \delta_u * rand_2$ .

O parâmetro  $CR$  é calculado segundo

$$CR_{i,t+1} = \begin{cases} rand_3, & \text{se } rand_4 \leq \pi_2 \\ CR_{i,t}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

onde:  $rand_j \in [0, 1]$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  são números aleatórios e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são constantes reguladoras da adaptação de  $F$  e  $CR$ , enquanto  $\delta_l, \delta_u$  representam os limites inferior e superior, respectivamente, do parâmetro de escala  $\delta$  e  $C(\mu, \delta)$  denota uma distribuição de Cauchy. Além disso, os valores  $\delta$  e  $CR$  são acrescidos ao cromossomo (conjunto dos valores das variáveis de projeto) de cada indivíduo, dessa forma passando a participar da evolução, sendo adaptados ao longo do processo. A distribuição de Cauchy foi adotada por possuir “espessas caudas”, permitindo mudanças consideráveis, mais freqüentemente, aumentando a probabilidade de “saltos” maiores que permitam a fuga de ótimos locais.

Já na proposta apresentada em [5] o parâmetro  $F$  é calculado de forma aleatória a cada geração, mas sofre a influência de dois valores constantes ( $a$  e  $b$ ), os quais somados não ultrapassam o valor 1:

$$F = a + b * rand[0, 1] \quad (3)$$

sendo  $rand[0, 1]$  uma função que retorna um valor aleatório entre 0 e 1. O estudo afirma ainda que o melhor valor para  $F$ , na maioria dos casos, varia entre 0,4 e 1.

### 4 Manipulação das Restrições

O uso da DE em problemas práticos requer claramente um mecanismo capaz de manipular restrições. Com isso o espaço de busca, anteriormente totalmente livre, é reduzido à região que contém as soluções que satisfazem às restrições do problema.

Uma das principais técnicas de tratamento de restrições foi proposta inicialmente para algoritmos genéticos em [4] e é empregada junto à DE por exemplo em [5, 18, 7]. Nela os indivíduos são gerados normalmente, alterando-se apenas o processo de inserção, ou seja, na escolha de qual indivíduo permanecerá na população após a geração de uma nova solução. Nesse caso são mantidos na população tanto indivíduos válidos quanto inválidos, mas um indivíduo válido sempre prevalece quando comparado à um inválido. O mecanismo é descrito pelas regras:

- Se um indivíduo válido é comparado à um indivíduo inválido, mantém-se o válido;
- Se ambos os indivíduos são válidos, mantém-se aquele que possuir melhor aptidão;
- Se ambos os indivíduos são inválidos, mantém-se aquele que possuir a menor soma das violações nas restrições.

Outra técnica largamente utilizada em algoritmos evolucionistas, e dessa forma aplicável à DE, consiste na penalização de indivíduos inválidos. Assim, indivíduos que não satisfazem a todas as restrições sofrem uma redução em sua aptidão. Entretanto, são mantidos na população e podem

competir com indivíduos válidos. Essa técnica torna viável a busca da solução ótima tanto por regiões factíveis quanto por regiões infactíveis.

Quanto à forma de aplicação dessa penalização, diversos estudos apresentam diferentes mecanismos que visam a diversificação da população sem perda da qualidade e viabilidade das soluções finais geradas. Como exemplo de penalização junto à DE destaca-se o trabalho [6], no qual (para problemas de minimização), adiciona-se à aptidão dos indivíduos inválidos um produtório com os valores das violações das restrições.

Nesse último caso, são necessárias constantes que regulam a penalização sofrida pelos indivíduos inválidos. Com o intuito de eliminar tais parâmetros adicionais, técnicas de penalização adaptativas foram propostas, onde a penalização é calculada a partir de informações obtidas durante o processo, e nesse sentido, destacamos a proposta presente em [14], inicialmente aplicada a algoritmos genéticos em [1].

Tal técnica, denominada APM (Adaptive Penalty Method), utiliza os valores de aptidão e das restrições na geração corrente no cálculo da penalização de cada indivíduo. Assim, restrições com menor grau de satisfação (mais difíceis de serem satisfeitas) possuem um maior peso na penalização do indivíduo. O cálculo da aptidão dos indivíduos é dado por

$$F(X) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é válido} \\ \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

com

$$\bar{f}(X) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > \langle f(x) \rangle \\ \langle f(x) \rangle & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

O coeficiente de penalização  $k_j$  correspondente à  $j$ -ésima restrição é definido a cada geração por

$$k_j = |\langle f(x) \rangle| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{l=1}^m [\langle v_l(x) \rangle]^2} \quad (6)$$

onde  $\langle f(x) \rangle$  é a média da aptidão na população corrente e  $\langle v_l(x) \rangle$  é a violação média da  $l$ -ésima restrição na população corrente.

Algumas variantes do APM foram apresentadas em [3], as quais visam uma redução do esforço computacional e uma maior suavidade na variação dos coeficientes  $k_j$ . Sendo assim, as variantes propõem desde a manutenção dos valores por um número maior de gerações até o uso da média entre o valor anterior e o corrente calculado, visando a suavização da variação dos valores. Contudo, neste trabalho iremos aplicar a variante na qual valores monótonos dos coeficientes  $k_j$  são utilizados, ou seja, cada coeficiente calculado na geração corrente é utilizado somente quando é maior que o coeficiente da geração anterior.

Outro ponto importante, em problemas restritos, diz respeito ao ajuste das variáveis dentro de seu respectivo intervalo permitido. Isso porque, na maioria dos casos, cada variável é limitada inferiormente ( $L_i$ ) e superiormente ( $L_s$ ).

Os valores da população inicial são sempre gerados dentro do intervalo estabelecido para cada variável. Entretanto, não é possível assegurar que os valores produzidos pela mutação não excedam tais limites. Com o intuito de evitar essas violações, diferentes técnicas foram empregadas, sendo o ajuste posterior à mutação, ou seja, o valor é gerado normalmente e, posteriormente, caso não pertença ao intervalo, o valor é realocado dentro do intervalo permitido.

Podemos destacar [17, 18, 9] quanto ao ajuste dos valores que violam o intervalo permitido, sendo que em [17] um novo valor aleatório é gerado dentro do intervalo, desconsiderado o valor gerado pela mutação. Já em [18] seleciona-se o valor central entre o valor pertencente ao indivíduo alvo (atual indivíduo da população) e o limite mais próximo do valor gerado. Por fim, em [9], usa-se o limite mais próximo ao valor gerado, baseando-se na idéia de que a solução ótima está frequentemente localizada na fronteira da região factível.

## 5 Experimentos Numéricos

Com intuito de avaliar comparativamente as modificações propostas para a DE, essa seção apresenta dois problemas de otimização estrutural.

Para isso o seguinte esquema foi utilizado: Para cada problema avaliado, configuramos a DE utilizando todas as variantes apresentadas neste trabalho (DE/rand/1/bin, [8], DE/target-to-best/1/bin e DE/best/1/bin) e utilizando um tratamento de limite das variáveis por nova geração aleatória [17] (identificada por “Aleatório”), valores dos parâmetros  $F$  e  $CR$  fixos em 0,8 e 0,9, respectivamente (identificada por “Fixo”), assim como a manipulação de restrições proposta por [4] (identificado simplesmente por “Deb”).

Realizada essa comparação, o melhor resultado, em média da aptidão, é selecionado, ou seja, os próximos comparativos utilizam essa variante a fim de avaliar as propostas relacionadas ao tratamento de limites das variáveis, sendo o processo repetido para os demais comparativos: a geração dos parâmetros e a manipulação de restrições.

Por simplificação, as propostas avaliadas recebem identificações. Sendo elas, “Central” para o uso do valor central entre o limite permitido e o valor do vetor alvo e “Próximo” para o uso do limite mais próximo ao valor gerado. Quanto aos valores dos parâmetros identificamos como “Aleatório” a proposta de [5] e “Dinâmico” a proposta de [15]. Já a avaliação quanto ao tratamento de restrições são apresentados os resultados obtidos pelo uso do mecanismo apresentado em [4] (“Deb”), a penalização proposta em [6] (“Lampinen”) e o uso do APM e sua versão monótona (“APM” e “APM M.”), todas as propostas aplicadas junto à DE. Além disso, é indicado por “GA+APM” o uso conjunto do APM e de um algoritmo genético, para efeito de comparação dos resultados obtidos pela DE.

Em todos os comparativos foram permitidas no máximo 500 gerações e 80 indivíduos na população. Sendo assim, um total de 40000 avaliações da função de aptidão foram permitidas por execução. E para cada comparativo, destacamos a média, a melhor, o pior e o desvio padrão (DP) da aptidão obtida após as 20 execuções realizadas para cada proposta. Também são apresentados o número de avaliações médio necessário para atingir o melhor resultado da execução.

### 5.1 Experimento - Treliça de 10 Barras

Este é um problema teste bem conhecido correspondente à minimização do peso da treliça de 10 barras apresentada na Figura 3. O experimento utiliza todas as considerações descritas em [2], sendo aqui avaliado o caso contínuo e com limite inferior de  $0,1in^2$  para cada barra. Os resul-

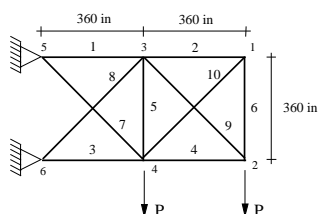


Figura 3: Treliça de 10 barras

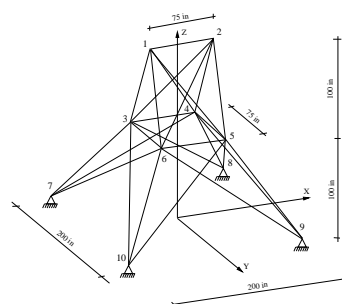


Figura 4: Treliça de 25 barras

tados obtidos são apresentados na Tabela 1, sendo selecionado nos três primeiros comparativos as seguintes implementações: “Best” (primeiro comparativo - variantes), “Aleatório” (segundo comparativo - limites) e parâmetros fixos - “Fixo” (terceiro comparativo - parâmetros).

### 5.2 Experimento - Treliça de 25 Barras

Novamente seguimos [2], o qual exhibe um problema de minimização do peso de uma treliça de 25 barras, sendo o problema apresentado esquematicamente na Figura 4.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2, sendo selecionados nos três primeiros comparativos as seguintes implementações: “DE/1/best/bin” “Best” (primeiro comparativo - variantes), “Aleatório” (segundo comparativo - limites) e parâmetros fixos - “Fixo” (terceiro comparativo - parâmetros).

Tabela 1: Resultados do experimento (Treliza de 10 Barras) - Avaliação das propostas

Primeiro Comparativo - Variantes						Terceiro Comparativo - Parâmetros																	
Aptidão					Média	Aptidão					Média												
Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.									
Rand	5225,3642	5346,2658	5446,7807	57,86	35908	Fixo	5060,9843	5064,7867	5060,9843	5,57	39492	Aleatório	5061,5312	5081,6362	5172,0249	27,71	32864	Dinâmico	5061,3300	5229,2328	6422,4067	395,62	34556
Segundo Comparativo - Limites						Quarto Comparativo - Restrições																	
Aptidão					Média	Aptidão					Média												
Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.									
Próximo	5060,8540	5069,5525	5076,6699	8,07	30860	Deb	5060,9516	5063,2617	5078,3642	5,09	39648	Lampinen	5060,9301	5062,4599	5076,7773	3,46	38800	APM	5060,9653	5065,1214	5077,9067	6,37	38640
Central	5060,8540	5070,3434	5076,6699	7,94	31688	APM M.	5060,9721	5063,7945	5087,3691	6,55	39200	GA+APM	5069,09	5091,43	5117,39	-	-						
Aleatório	5061,0068	5062,9214	5076,9492	4,78	39548																		

Tabela 2: Resultados do experimento (Treliza de 25 Barras) - Avaliação das propostas

Primeiro Comparativo - Variantes						Terceiro Comparativo - Parâmetros																	
Aptidão					Média	Aptidão					Média												
Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.									
Rand	484,5226	484,9526	485,5597	0,29	37860	Fixo	484,0514	484,0517	484,0551	8,16e-4	39404	Aleatório	484,0514	484,0566	484,0848	8,08e-3	22332	Dinâmico	484,0576	485,4541	501,6343	3,91	31652
Segundo Comparativo - Limites						Quarto Comparativo - Restrições																	
Aptidão					Média	Aptidão					Média												
Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.	Melhor	Média	Pior	DP	Aval.									
Próximo	484,0514	484,4435	491,5019	1,70	14892	Deb	484,0514	484,0518	484,0555	9,16e-4	39608	Lampinen	484,0514	484,0518	484,0548	7,46e-4	39604	APM	484,0514	484,0515	484,0521	1,90e-4	39292
Central	484,0514	484,1259	485,5425	0,33	14776	APM M.	484,0514	484,0516	484,0520	1,82e-4	39356	AG+APM	484,736	487,665	493,039	-	-						
Aleatório	484,0514	484,0516	484,0527	3,7e-4	39428																		

## 6 Conclusões

Este trabalho mostrou como várias propostas em torno da Evolução Diferencial vêm sendo elaboradas, o que denota a importância deste método, relativamente recente, de otimização.

Quanto aos resultados, analisamos aqui quatro aspectos separadamente. O primeiro corresponde às variantes da DE, onde destacam-se os resultados obtidos pelas variantes DE/best/1/bin, o que sugere o uso do melhor indivíduo da população na mutação como uma técnica eficiente. A segunda avaliação aborda o tratamento dos limites das variáveis. Neste caso, os resultados obtidos mostraram que o uso de uma nova geração aleatória [17] produziu melhores resultados, embora próximos aos obtidos por “Próximo”, quanto à aptidão, e de inferior qualidade, quanto ao número de avaliações. Sendo assim, a escolha da técnica irá depender das características do problema, sendo essa segunda técnica indicada quando espera-se soluções na fronteira da região factível. A terceira avaliação realizada refere-se ao uso dos parâmetros  $F$  e  $CR$  da Evolução Diferencial. As três propostas analisadas mostraram-se eficientes, apesar da configuração dos parâmetros de forma fixa proporcionar melhores resultados. Porém, considerando a proximidade dos resultados obtidos, pode-se dizer que a técnica dinâmica [15] é interessante em casos nos quais não são conhecidas as melhores configurações para o problema tratado. A última análise realizada refere-se ao tratamento de restrições. Neste caso destacamos as técnicas de penalização dos indivíduos inválidos [1, 3, 6], sendo estas responsáveis pelos melhores resultados. E, da mesma forma que o caso anterior, destacamos a penalização adaptativa como técnica mais eficiente quando não existe prévio conhecimento da melhor configuração do problema, dada a necessidade de definição de parâmetros na técnica descrita em [6].

## Agradecimentos

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## Referências

- [1] H.J.C. Barbosa and A.C.C. Lemonge, A New Adaptive Penalty Scheme for Genetic Algorithms, *Information Sciences*, 156, (2003) 215-251
- [2] H.J.C. Barbosa and A.C.C. Lemonge, An Adaptive Penalty Scheme for Genetic Algorithms in Structural Optimization, *Intl. J. For Num. Methods in Eng.*, 5 (2004) 703-736
- [3] H.J.C. Barbosa and A.C.C. Lemonge, Frontiers in Evolutionary Robotics, chapter An Adaptive Penalty Method for Genetic Algorithms in Constrained Optimization Problems, *I-Tech Educ. and Pub.*, Viena, pp. 596-621, 2008
- [4] K. Deb, An Efficient Constraint Handling Method for Genetic Algorithms, *Computer Met. in Applied Mec. and Eng.*, 186, (2000) 311-338
- [5] H. Kim and J. Chong and K. Park and D.A. Lowther, Differential Evolution Strategy for Constrained Global Optimization and Application to Practical Engineering Problems, *IEEE Trans. on Magnetics*, 43, (2007) 1565-1568
- [6] J. Lampinen and I. Zelinka, Mixed Integer-Discrete-Continuous Optimization By Differential Evolution, Part 1: The optimization method, em “Proc. of the 5th Intl. Mendel Conf. on Soft Computing”, pp. 77-81, Czech Republic, 1999
- [7] E. Mezura-Montes and J. Velázquez-Reyes and C.A.C. Coelho, Modified Differential Evolution for Constrained Optimization, em “Proc. IEEE CEC”, pp. 25-32, Vancouver, 2006
- [8] E. Mezura-Montes and J. Velázquez-Reyes and C.A.C. Coelho, A Comparative Study of Differential Evolution Variants for Global Optimization, em “Proc. GECCO”, pp. 8-12, Seattle, 2006
- [9] G.C. Onwubolu, New Optimization Techniques in Engineering, chapter Differential Evolution for the Flow Shop Scheduling Problem, Springer, New York, pp. 585-611, 2004
- [10] K.V. Price, An Introduction to Differential Evolution, *New ideas in optimization*, McGraw-Hill Ltd., Maidenhead, England, pp. 79-108, 1999
- [11] K.V. Price and R.M. Storn and J. A. Lampinen, Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization, *Springer*, New York, 2006
- [12] A.K. Qin and P.N. Suganthan, Self-adaptive differential evolution algorithm for numerical optimization, *Evolutionary Computation. The 2005 IEEE Cong. on*, 2, (2005) 1785-1791
- [13] A. Qing, A Study on Base Vector for Differential Evolution, em “Proc. IEEE CEC”, pp. 550-556, Hong Kong, 2008
- [14] E.K. Silva and H.J.C. Barbosa and A.C.C. Lemonge, An Adaptive Constraint Handling Technique for Differential Evolution in Engineering Optimization, em “Int. Conf. on Engineering Optimization - EngOpt 2008”, 2008
- [15] O.S. Soliman and L.T. Bui, A Self-Adaptive Strategy for Controlling Parameters in Differential Evolution, em “Proc. of the IEEE CEC”, pp. 2837-2842, Hong Kong, 2008
- [16] R. Storn and K.V. Price, Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, *J. of Global Optimization*, 11, (1997) 341-359
- [17] M. Zhang and W. Luo and X. Wang, Differential Evolution with Dynamic Stochastic Selection for Constrained Optimization, *Information Sciences*, 178, (2008) 3043-3074
- [18] K. Zielinski and R. Laur, Constrained Single-Objective Optimization Using Differential Evolution, em “IEEE CEC”, pp. 223-230, Vancouver, 2006