ISSN 1984-820X

# A Decomposição em Valores Singulares para o Problema de Regressão de Penrose

**Thiane P. P. Coliboro**[1]
Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática
88040-900, Campus Trindade, Florianópolis, SC
E-mail: thiane.mtm@gmail.com

**Juliano B. Francisco**
Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Matemática
88040-900, Campus Trindade, Florianópolis, SC
E-mail: juliano@mtm.ufsc.br

## RESUMO

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$ matrizes conhecidas. O problema de regressão de Penrose consiste em minimizar $\|AXC - B\|_F^2$, onde a matriz procurada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $p \leq n$, deve satisfazer a restrição $X^TX = I$. Ou seja,

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \|AXC - B\|_F^2 \\ s.a & X^TX = I. \end{array} \tag{1}$$

Este problema de regressão tem atraído a atenção de pesquisadores de diversas áreas, como por exemplo, análise de dados multivariada, problemas em imagem, movimento de corpos rígidos, psicometria, entre outros.

No entanto, o problema descrito na equação (1) não apresenta solução analítica. Neste caso, uma solução aproximada pode ser obtida por meio de métodos iterativos de otimização (veja [1] e [6] como por exemplo), incentivando, consequentemente, a busca por teorias e formulações que ajudem a elucidar e interpretar este importante problema de minimização [2, 4].

Vale a pena mencionar que quando $C = I$ e $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfazendo $X^TX = I$, isto é, $X$ é uma matriz ortogonal, o problema de minimização (1) é denominado Problema de Procrustes Ortogonal. Neste caso, o problema torna-se

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \|AX - B\|_F^2 \\ s.a & X^TX = I_p, \end{array} \tag{2}$$

cuja solução analítica é dada por $X = UV^T$, sendo $U$ e $V$ as matrizes ortogonais provenientes da decomposição em valores singulares (SVD) de $A^TB$ [3, 5].

O objetivo deste trabalho é estudar um caso particular de (1), onde $C = I$ e $A = I$, sendo $p = q$ e $m = n$. Assim, o problema pode ser escrito como

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \|X - B\|_F^2 \\ s.a & X^TX = I, \end{array} \tag{3}$$

onde $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $p < n$.

[1]Aluna de iniciação científica do curso de Licenciatura em Matemática.

Para este caso particular obtemos uma solução analítica para o problema de minimização utilizando a decomposição em valores singulares da matriz $B$ conforme se segue. Seja $B = U\Sigma V^T$, com $V \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times q}$ e $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, sendo $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$ com $U_1 \in \mathbb{R}^{m\times q}$ e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \sigma_q \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_q.$$

Considerando a seguinte igualdade:

$$\|X - B\|_F^2 = \left\|X - U\Sigma V^T\right\|_F^2 = \left\|U^T XV - \Sigma\right\|_F^2, \tag{4}$$

e definindo $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^{n\times p};\ X^T X = I\}$ como o conjunto viável da equação (3), mostramos que $Y = U^T XV \in \Omega$ se, e somente se, $X \in \Omega$.

Assim, o problema descrito na equação (3) consiste agora em

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \|Y - \Sigma\|_F^2 \\ s.a & Y^T Y = I, \end{array} \tag{5}$$

com $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Utilizando a formulação (5), conclui-se que a solução $X$ desejada é dada por $X^* = U_1 V^T \in \mathbb{R}^{m\times q}$.

Futuros trabalhos nesta direção ainda podem ser explorados buscando uma solução analítica para casos mais gerais do que o apresentado neste trabalho

**Palavras-chave**: *SVD, Regressão de Penrose, Procrustes ortogonal*

## Referências

[1] BOJANCZYK, A. W.; LUTOBORSKI, A.. **The Procrustes problem for orthogonal Stiefel matrices**, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 21, no. 4, 2000.

[2] ELDEN, L.; PARK, H.. **A Procrustes problem on the Stiefel manifolds**, Numerische Mathematik, vol. 82, pp. 599–619, 1999.

[3] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F.. **Matrix Computations**. 3. ed. Maryland: Johns Hopkins University Press, 1996.

[4] NEMIROVSKI, A.. **Sums of random symmetric matrices and quadratic optimization under orthogonality constraints**, Mathematical Programming, vol. 109, pp. 283–317, 2007.

[5] TREFETHEN, L. N.; BAU, D., III. **Numerical Linear Algebra**. Philadelphia: Society For Industrial And Applied Mathematics, 1997.

[6] N. T. TRENDEDAFILOV, **On the $l_1$ Procrustes problem**, Future Generation Computer Systems, vol. 19, pp. 1177-1186, 2003.