ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Estudo da Estabilidade Assintótica do Modelo Logístico com Retardo Fuzzy

Rosana S. M. Jafelice,
Faculdade de Matemática, UFU
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: rmotta@ufu.br,

Laécio C. Barros,
DMA, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
laeciocb@ime.unicamp.br,

Rodney C. Bassanezi
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC
09210-170, Santo André, SP
E-mail: rodney@ime.unicamp.br.

Resumo: *Os modelos determinísticos descritos por equações diferenciais com retardamento são geralmente mais realistas do que os sem retardamento, porém, quase sempre o retardo é um parâmetro incerto. Tradicionalmente, tais incertezas têm sido tratadas por meio de métodos estatísticos. No entanto, nas últimas décadas, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy tem contribuído significativamente na modelagem matemática de fenômenos incertos. Nosso objetivo neste trabalho é analisar a subjetividade fuzzy no retardo e para tal usamos o modelo logístico como exemplo. Estudamos a estabilidade assintótica do modelo através da equação determinística e analisamos a região de estabilidade. Determinamos a solução defuzzificada do modelo não-linear e do modelo linearizado.*

Palavras-chave: *Equações Diferenciais com Retardamento, Conjuntos Fuzzy, Modelo Logístico.*

1 Introdução

A percepção de que em alguns fenômenos, informações passadas influenciam na análise presente de tais sistemas já é bastante conhecida. A referência clássica sobre sistemas diferenciais com atraso no domínio do tempo se deve a Volterra [9]. Até então os resultados obtidos para este tipo de sistema tais como, propriedades de existência, unicidade, continuidade com relação a um conjunto de parâmetros incluindo condições iniciais e outros tópicos, como comportamento assintótico de soluções próximas de pontos de equilíbrios, eram estudadas apenas para classes muito restritas de problemas. A partir de [9] houve um desenvolvimento extraordinário da teoria de equações diferenciais com retardo que despertou o interesse de vários pesquisadores para o estudo de soluções especiais para esta classe de equações funcionais bem como um desenvolvimento adequado de uma teoria qualitativa para sistemas com retardo no mesmo espírito que equações diferenciais ordinárias.

A literatura relacionada ao tema de equações diferenciais funcionais é relativamente extensa. Como referências clássicas ao estudo de sistemas de equações diferenciais funcionais citamos [3] e [4].

Nos últimos anos devido à possibilidade de manipulação de informações incertas e seu respectivo armazenamento em computadores, a teoria dos conjuntos fuzzy tem se tornado uma das áreas emergentes em tecnologia contemporânea. Tal teoria pode facilitar o trabalho do modelador e de um especialista da área e possivelmente acrescentar 'novas' informações, facilitando a análise e compreensão de algumas situações reais. Assim, o retardo pode ser tratado como um parâmetro fuzzy. Uma aplicação interessante está relacionada com o controle de epidemias e

estudo de doenças como a AIDS, em que se têm apenas informações parciais ou dadas lingüisticamente [5] e [6].

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a solução do modelo de crescimento inibido sendo o retardo um parâmetro fuzzy. Nosso interesse se concentrou em:

- Estudar a estabilidade assintótica do modelo através da equação determinística e analisar a região de estabilidade.
- Determinar a solução defuzzificada do modelo não-linear e do modelo linearizado.

2 Modelo Clássico de Dinâmica Populacional

Uma das deficiências de modelos de população simples como $\frac{dN}{dt} = f(N)$, onde $N(t)$ é a população da espécie no instante t e $f(N)$ é tipicamente uma função não linear de N, é que a taxa de nascimento é considerada funcionando instantaneamente enquanto pode existir um tempo de retardo considerando o tempo de alcançar a maturidade, o período de gestação finito e assim por diante. Podemos incorporar tais retardos nos modelos gerais de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dN}{dt} = f(N(t), N(t-T)) \tag{1}$$

onde T é o retardo, $T > 0$. Um modelo interessante pode ser analisado neste contexto - o modelo logístico com retardo. Tal modelo, pode ser interpretado, como uma extensão do modelo logístico $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$, denominado, a equação diferencial com retardo

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N(t-T)}{k}\right) \tag{2}$$

onde r, k e T são constantes positivas. Isto diz que o efeito regulador depende da população no tempo anterior $(t-T)$, ao invés de t [8].

3 Estudo da Estabilidade Assintótica

Linearizamos a equação diferencial com retardo (2) em torno de cada ponto de equílibrio $N = 0$ e $N = k$ [2].

- Para $N = 0$, a equação linearizada é
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t),$$
e neste caso $N = 0$ é instável.
- Para $N = k$ a equação linearizada é
$$\frac{dN(t)}{dt} = -r\left(N(t-T) - k\right),$$

Para obter a equação característica, fizemos a seguinte mudança de variável:
$x(t) = N(t) - k$. Assim, obtemos a equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -rx(t-T). \tag{3}$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial da equação (3), da forma $x(t) = ce^{zt}$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ é que z seja uma solução não nula de:

$$cze^{zt} = -rce^{z(t-T)}$$
$$z + re^{-zT} = 0 \tag{4}$$

3.1 Autovalores Reais

Seja $z = a + bi$ consideremos a primeira possibilidade de raízes reais $b = 0$. Logo, temos a equação

$$a + re^{-aT} = 0. \tag{5}$$

A partir da análise da função $f(a) = a + re^{-aT}$, obtemos as seguintes conclusões:

- como $r > 0$, (5) ou não terá raízes reais, ou terá duas raízes negativas ou terá uma raiz dupla negativa. A raiz dupla ocorrerá quando $\frac{1}{T} = re^{-aT}$ e neste caso, $a = -\frac{1}{T}$ e $r = \frac{1}{eT}$.
  - para $r < \frac{1}{eT}$ tem-se duas raízes negativas;
  - para $r > \frac{1}{eT}$, (5) não tem raízes reais.

Veja a Figura 1 como uma ilustração para T=1.

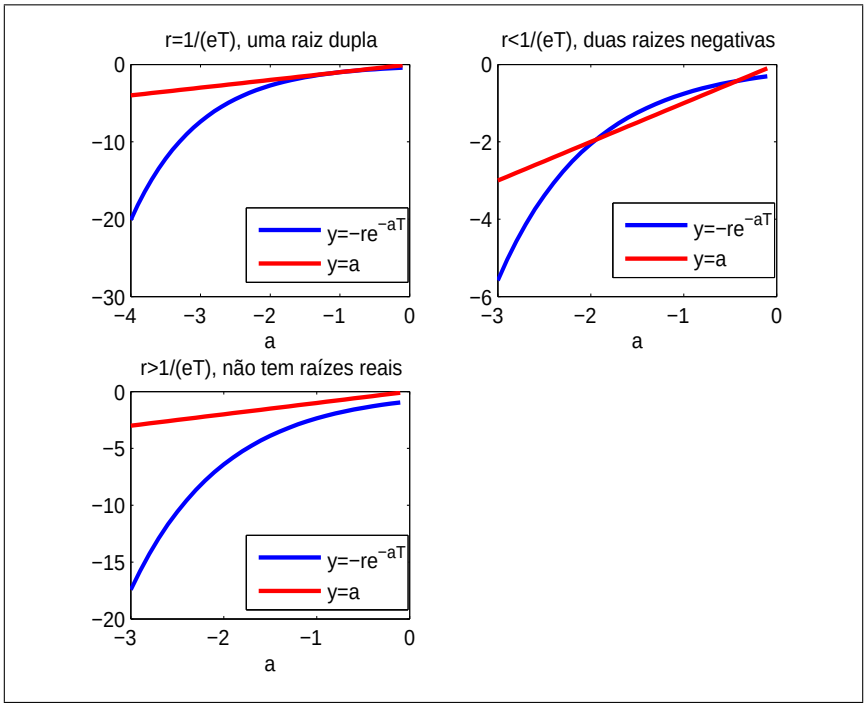

Figura 1: Analíse gráfica das raízes.

3.2 Autovalores Complexos

Seja $z = a + bi$ consideremos $b \neq 0$ e assim, obtemos:

$$a + re^{-aT} cos(bT) = 0$$

$$b - re^{-aT} sen(bT) = 0$$

Para $a < 0$ devemos ter $0 < bT < \frac{\pi}{2}$ e determinamos $a = \dfrac{-b}{tg(bT)}$.

3.3 O Estudo da Estabilidade do Equilíbrio $N = k$

Fizemos o estudo da solução analítica para o ponto de equílibrio $N = k$:

- para autovalores reais $x(t) = ce^{at}$ com $a < 0$ temos que: $x(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ e, devido à mudança de variável $x(t) = N(t) - k$, temos que: $N(t) \longrightarrow k$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- para autovalores complexos, obtemos a solução: $x(t) = c_1 e^{at} cos(bt) + c_2 e^{at} sen(bt)$ com $0 < bT < \frac{\pi}{2}$ e $a = \dfrac{-b}{tg(bT)}$, a pela mudança de variável $x(t) = N(t) - k$, temos que: $N(t) = c_1 e^{at} cos(bt) + c_2 e^{at} sen(bt) + k$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

4 Equação com Retardo Fuzzy

A partir da solução numérica da equação diferencial com retardamento (2), consideramos o retardamento T como um parâmetro fuzzy, ilustrado na Figura 2; o suporte de T varia entre 0.8 e 1.2. Utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh para, a partir da solução determinística, obtermos a solução da equação diferencial fuzzy.

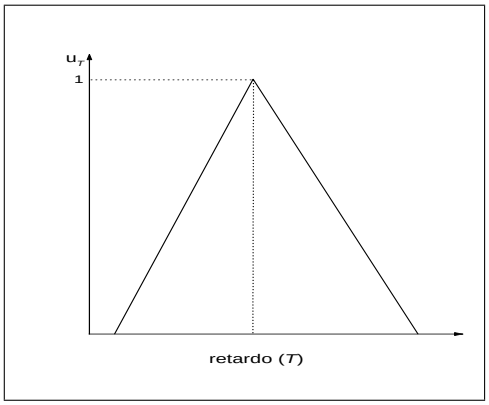

Figura 2: Parâmetro fuzzy (T).

4.1 Estudo da Estabilidade Assintótica Fuzzy

4.1.1 Autovalores Reais

Para os autovalores reais quando o retardo é fuzzy, o comportamento das raízes da equação (5) é similar ao retardo real. Porém, a curva $y = -re^{-aT}$ é fuzzy com $0.8 \leq T \leq 1.2$. A Figura 3 apresenta algumas curvas para T variando entre 0.8 e 1.2, estas curvas apresentam seus respectivos graus de pertinências.

4.1.2 Autovalores Complexos

No estudo da estabilidade assintótica quando o retardo é um parâmetro fuzzy, observamos o seguinte para os autovalores complexos, temos que: para $a < 0$, devemos ter $0 < bT < \frac{\pi}{2}$ e determinamos $a = \dfrac{-b}{tg(bT)}$ com $0.8 \leq T \leq 1.2$. A Figura 4 apresenta o gráfico do parâmetro fuzzy bT.

4.2 Solução Linear Fuzzy

Utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh, para cada t, na solução da equação linear:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -r\left(N(t-T) - k\right). \tag{6}$$

A Figura 5 apresenta a solução numérica da equação (6) quando T é um parâmetro fuzzy triangular com suporte no intervalo $0.8 \leq T \leq 1.2$, $r = 0.5$ e $k = 2$. A solução numérica do modelo fuzzy é apresentada na Figura 5, observando-se que na região central o grau de

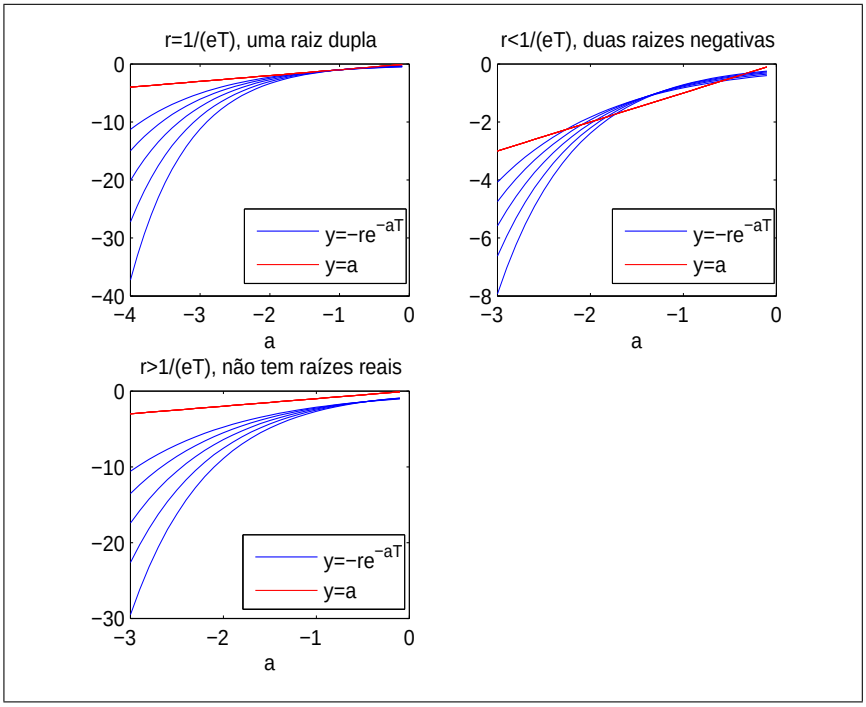

Figura 3: Análise gráfica das raízes quando o retardo T é um parâmetro fuzzy.

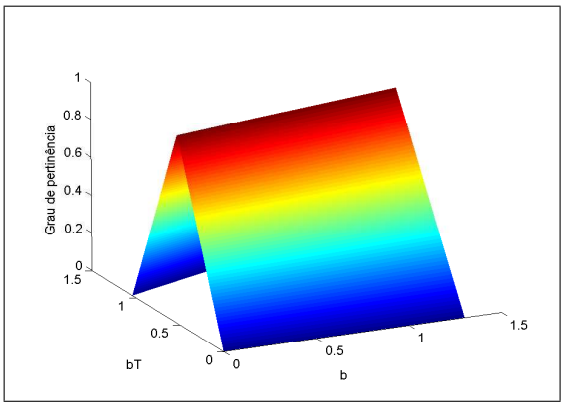

Figura 4: O parâmetro fuzzy bT.

pertinência aproxima-se de 1. Esta região é a que melhor representa o fenômeno biológico do ponto de vista de credibilidade.

Observemos que o Princípio de Extensão de Zadeh tem boas propriedades quando a condição inicial é fuzzy. Quando tomamos um parâmetro fuzzy, para aplicar este princípio é necessário ampliar a dimensão do sistema, levando a subjetividade para a condição inicial ([1] e [7]).

4.3 Solução Não-Linear Fuzzy

Utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh para cada t e obtemos uma família de soluções numéricas para a equação (2).

A Figura 6 apresenta a solução numérica da equação (2) quando T é um parâmetro fuzzy triangular com suporte no intervalo $0.8 \leq T \leq 1.2$, $r = 0.5$ e $k = 2$. A solução numérica do modelo fuzzy não-linear é apresentada na Figura 5, mostrando a região central onde o grau de pertinência aproxima-se de 1.

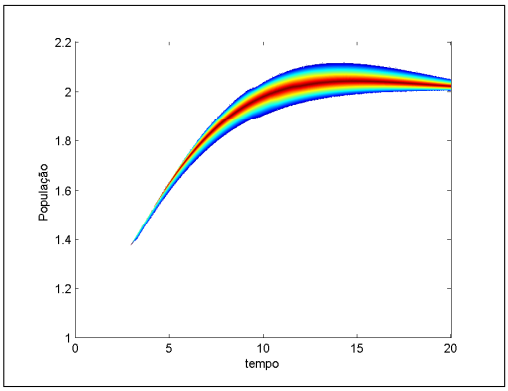

Figura 5: Solução linear fuzzy.

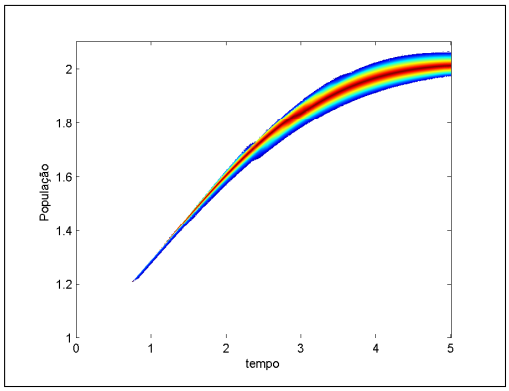

Figura 6: Solução não-linear fuzzy.

4.4 Soluções Defuzzificadas

O valor numérico da população $N(t)$ é escolhido, em cada instante t, da seguinte forma:

$$N(t) = \frac{\int\limits_{supp(W_t)} N_t u_{W_t}(N_t) dN_t}{\int\limits_{supp(W_t)} u_{W_t}(N_t) dN_t} \tag{7}$$

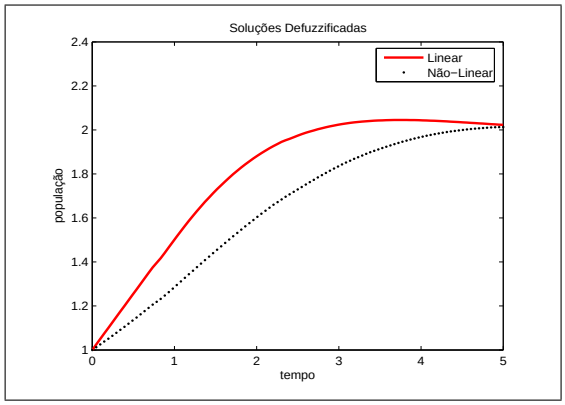

Figura 7: Soluções defuzzificadas das equações (2) e (6).

A Figura 7 apresenta os gráficos das soluções da equação linear e não-linear defuzzificadas, onde podemos observar que as duas convergem para o ponto de equílibrio k. As soluções defuzzificadas representam as médias das soluções fuzzy, linear e não-linear. Verificamos que apesar de ocorrer uma diferença no início do processo, para valores grandes de tempo as médias aproximam-se e tendem ao ponto de equílibrio k.

5 Conclusões

O modelo logístico com retardo fuzzy apresenta uma região de estabilidade, que inclusive tem graus de pertinências enquanto que o modelo determinístico apresenta um intervalo de convergência. Observamos que o ponto de equílibrio $N = k$ é assintoticamente estável para $0 < bT < \frac{\pi}{2}$ e esta região pode ser estendida para $2m\pi < bT < \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ onde $m \in \mathbb{Z}$.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à FAPEMIG pelo auxílio financeiro e o segundo autor agradece à FAPESP, Processo nº 06/05920-7 e ao CNPq, Processo nº 307890/2006-6.

Referências

[1] M.S. Cecconello, Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática, IMECC-UNICAMP, 2010.

[2] J.M. Cushing, Lecture Notes in Biomathematics: "Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[3] J.K. Hale, "Functional Differential Equations - Appl. Math. Sci.", Springer-Verlag, vol.3, 1971.

[4] J.K. Hale e S.M. Verduyn Lunel,"Introduction to Functional-Differential Equations - Appl. Math. Sci.", Springer-Verlag, New York, vol. 99, 1993.

[5] R.M. Jafelice, L.C. Barros e R.C. Bassanezi, Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy com Retardo: Uma Aplicação na Dinâmica do HIV com Tratamento, *Biomatemática*, 18 (2008), 131-148.

[6] R.M. Jafelice, L.C. Barros e R.C. Bassanezi, A Fuzzy Delay Differential Equation Model for HIV Dynamics, In: 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress - 2009 European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT2009), Lisboa, 265-270.

[7] M.T. Mizukoshi, Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2004.

[8] J.D. Murray, "Mathematical Biology: An Introduction", Springer-Verlag, Berlin, 3ª edição, 2002.

[9] V. Volterra, Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires, *J. Math. Pures Appl.*, 7 (1928), 248-298.