

# Sincronismo em um Modelo Metapopulacional com Hierarquia e Acoplamento Não Estacionário

**Flávia T. Giordani\***

Departamento de Matemática, UFSC  
 88040-900, Florianópolis, SC  
 E-mail: ftgiordani@gmail.com

**Jacques A. L. da Silva**

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMAp, UFRGS  
 Porto Alegre, RS  
 E-mail: jaqx@mat.ufrgs.br

**Resumo:** Um modelo metapopulacional de múltiplas espécies com migração dependente da densidade e acoplamento não estacionário é considerado. A dinâmica local e as funções de migração consideradas apresentam estrutura de hierarquia. Obtemos, neste caso, condições suficientes para a estabilidade assintótica de atratores sincronizados, estendendo os resultados apresentados em [6].

**Palavras-chave:** *sincronismo, múltiplas espécies, acoplamento não estacionário, hierarquia*

## 1 Introdução

Sistemas metapopulacionais simples (sítios acoplados através de um processo de migração) podem apresentar vários tipos de comportamentos coletivos interessantes [8]. Entre eles, o fenômeno da sincronização, o qual está relacionado à coerência entre as flutuações das densidades populacionais [4]. Este fenômeno tem contribuído de forma significativa para a compreensão de certos aspectos da dinâmica desses sistemas, por exemplo, os relacionados à persistência populacional [3]. Estudos recentes mostram que o processo migratório pode influenciar a estabilidade de estados síncronos, em particular, quando a migração é dependente da densidade [10], [6].

Neste trabalho apresentamos um modelo metapopulacional geral de múltiplas espécies onde o acoplamento é não linear e dependente do tempo. Abordamos questões relativas à estabilidade do estado sincronizado para o caso em que, tanto a dinâmica local como o processo de migração tem estrutura hierárquica. Essa estrutura permitiu obter uma expressão analítica para os números transversais de Liapunov para atratores sincronizados (ver equação (10)). Os resultados obtidos generalizam os apresentados em [10], onde o caso estacionário foi considerado.

Cabe ressaltar que estudos rigorosos sobre os efeitos da dispersão dependente do tempo tem sido pouco considerados na literatura, embora redes de populações acopladas através de efeito de *delay* foram consideradas em [17].

## 2 O Modelo

Consideremos  $n$  subsistemas enumerados de 1 a  $n$ . A dinâmica de cada subsistema, sem acoplamento, é descrita pelo vetor  $\mathbf{x}_j^t = (x_{1j}^t, x_{2j}^t, \dots, x_{kj}^t)^T \in \mathbb{R}^k$  satisfazendo

$$\mathbf{x}_j^{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j^t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

\*Auxílio Financeiro: FUNPESQUISA - UFSC

onde  $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}_+^k \rightarrow \Omega$  é dada por

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T. \tag{2}$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função limitada de classe  $C^{1+\varsigma}$  por partes, com  $0 < \varsigma < 1$ . No caso de rede de populações acopladas, cada subsistema é denominado de sítio. Em cada sítio os indivíduos estão sujeitos ao processo de dinâmica local descrita acima, onde cada  $f_i$  incorpora os processos de reprodução e sobrevivência da espécie  $i$ .

A conexão entre os subsistemas é descrita por um acoplamento não estacionário e não linear. Consideremos  $\{\tilde{C}^s\}_{s \in [0,1]}$  uma família de matrizes duplamente estocásticas e irredutíveis e  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  contínua por partes. Para  $s^0 \in [0, 1]$  arbitrário, definimos recursivamente  $s^{t+1} = h(s^t)$  e  $C^{t+1} = \tilde{C}^{h(s^t)}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_+$ , com  $C^0 = \tilde{C}^{s^0}$ . Denotamos  $c_{ij}^t$  como os termos da matriz  $C^t$  e admitimos que  $c_{ii}^t = 0, \forall t \in \mathbb{Z}_+, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Para cada  $t \in \mathbb{Z}_+, c_{ji}^t$  representa a proporção de indivíduos que migra do sítio  $i$  para o sítio  $j$  no tempo  $t$ . Facilmente vemos que  $0 \leq c_{ij}^t \leq 1, \forall j, i = 1, 2, \dots, n$ . Além disso, para cada  $\mathbf{x} \in \Omega$ , definimos  $M^t(\mathbf{x}) = \text{diag}(\mu_1^t(\mathbf{x}), \mu_2^t(\mathbf{x}), \dots, \mu_k^t(\mathbf{x}))$  onde cada função  $\mu_i^t : \mathbb{R}_+^k \rightarrow [0, 1]$  satisfaz  $\mu_\ell^{t+1}(\cdot) = g_\ell(\mu_\ell^t(\cdot))$  e  $g_\ell : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \mu_\ell^0 : \mathbb{R}_+^k \rightarrow [0, 1]$  são funções de classe  $C^{1+\varsigma}$  por partes. Cada função  $\mu_i^t$  representa a fração de migração da espécie  $i$ , ou seja, a proporção dos indivíduos da espécie  $i$  que deixam um certo sítio, no tempo  $t$ . Assim, o sistema global (acoplado) é dado por

$$\mathbf{x}_j^{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j^t) - \sum_{i=1}^n b_{ji}^t \Phi^t(\mathbf{f}(\mathbf{x}_i^t)), \forall j = 1, 2, \dots, n, t = 0, 1, \dots, \tag{3}$$

onde  $b_{ji}^t$  são os elementos da matriz  $B^t = I_n - C^t$  e  $\Phi^t : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+^k$  é definida por  $\Phi^t(\mathbf{x}) = M^t(\mathbf{x})\mathbf{x}$ . Vamos admitir que  $\mathbf{f}$  possui um atrator  $\Omega_k$  e uma medida natural  $\rho$ , com suporte em  $\Omega_k$ .

### 3 Estabilidade Transversal

Uma órbita referente ao sistema (3) está em estado sincronizado se, para cada  $t = 0, 1, 2, \dots$ , temos que  $\mathbf{x}_i^t = \mathbf{x}_j^t = \mathbf{x}_s^t, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . Ou seja, o sistema está em estado sincronizado, se todas as subpopulações possuem o mesmo número de indivíduos, porém não necessariamente constante ao longo da evolução do tempo. As soluções sincronizadas assumem valores no sub-espaço  $k$  dimensional

$$\mathbb{S} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \tag{4}$$

do espaço de fase do sistema, onde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= ((1, 0, \dots, 0)_k, (1, 0, \dots, 0)_k, \dots, (1, 0, \dots, 0)_k)_{nk}^T, \\ \mathbf{v}_2 &= ((0, 1, 0, \dots, 0)_k, (0, 1, 0, \dots, 0)_k, \dots, (0, 1, 0, \dots, 0)_k)_{nk}^T, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= ((0, \dots, 0, 1)_k, (0, \dots, 0, 1)_k, \dots, (0, \dots, 0, 1)_k)_{nk}^T. \end{aligned} \tag{5}$$

A condição  $\sum_{i=1}^n c_{ji}^t = 1$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$  e todo  $t \in \mathbb{Z}_+$  é suficiente para que o sub-espaço  $\mathbb{S}$  seja invariante com relação ao sistema (3), e assim garanta a existência de soluções sincronizadas. Observamos que, na ausência de acoplamento, oscilações caóticas de  $\mathbf{f}$  podem nunca sincronizar devido à sensibilidade com relação às condições iniciais. No entanto, o acoplamento em (3) pode produzir um rico espectro de fenômenos coletivos, bem como sincronismo ([13],[4],[10]).

Denotando o sistema (3) na forma sucinta  $\mathbf{X}^{t+1} = \mathbf{F}^t(\mathbf{X}^t)$ , é fácil ver que  $\Omega_{nk} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega_k\}$  está contido em  $\mathbb{S}$ , correspondendo então a um atrator sincronizado para  $\mathbf{F}^t|_{\mathbb{S}}$ .

A estabilidade assintótica transversal de  $\Omega_{nk}$  será avaliada pelo processo de linearização do sistema. Seja  $\mathbf{X}_s^t = (\mathbf{x}_s^t, \mathbf{x}_s^t, \dots, \mathbf{x}_s^t) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  um estado sincronizado do sistema (3), onde

$\mathbf{x}_s^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_k^t)$  e  $\mathbf{x}_s^0 \in \Omega_k$ . A matriz jacobiana do sistema (3) calculada em  $\mathbf{X}_s^t$  é dada por (ver [11]),

$$J^t(\mathbf{X}_s^t) = I_n \otimes D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t) - B^t \otimes (D\Phi^t(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t)), \quad (6)$$

onde  $\otimes$  representa o produto de Kronecker (ver [11]). A análise do comportamento de componentes transversais à órbita sincronizada é feita utilizando a decomposição  $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$ , com  $S = \text{span}(v)$ ,  $v = (1, 1, \dots, 1)_n^T$ . Sejam  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  vetores coluna  $n$ -dimensionais linearmente independentes tais que  $S^\perp = \text{span}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ , então  $\beta = \{v, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$  é uma base para  $\mathbb{R}^n$ . Como consequência dos Teoremas de Perron Frobenius e Geršgorin (ver detalhes em [10]),  $\lambda_0 = 0$  é um autovalor simples de  $B^t$ , e é possível encontrar uma matriz invertível  $Q$  de ordem  $n$  tal que podemos escrever  $B^t = Q^{-1}B^tQ$ , onde

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & A^t & \end{bmatrix}, \quad (7)$$

e  $A^t$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$ . A matriz  $Q$  é precisamente a matriz de mudança da base canônica para a base  $\beta$ . Seja  $\mathbb{S}^\perp$  o complemento ortogonal de  $\mathbb{S}$  em  $\mathbb{R}^{n \times k}$ , ou seja,  $\mathbb{R}^{n \times k} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$ . Essa decomposição nos permite considerar a representação de um vetor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  em termos de uma base  $\Gamma$  formada pelos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  juntamente com outros  $k(n-1)$  vetores linearmente independentes que geram  $\mathbb{S}^\perp$ . Através de um cálculo elementar é possível mostrarmos que a matriz de mudança de base, da base usual do  $\mathbb{R}^{n \times k}$  para  $\Gamma$ , é dada por  $Q \otimes I_k$ .

Não é difícil ver que  $\lambda_0 = 0$  é um autovalor de multiplicidade  $k$  para  $B^t \otimes I_k$  e seu auto-espaço associado é  $\mathbb{S}$ . Dessa forma a matriz jacobiana pode ser reescrita como

$$J^t(\mathbf{X}_s^t) = I_n \otimes D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t) - (I_n \otimes (D\Phi^t(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t)))(B^t \otimes I_k),$$

e portanto  $\mathbb{S}$  é um subespaço invariante com relação a  $J^t$ . Isso nos induz a considerar a representação de  $J^t$  em termos da base  $\Gamma$ , ou seja,

$$\begin{aligned} (Q \otimes I_k)J(\mathbf{X}_s^t)(Q \otimes I_k)^{-1} &= (I_n \otimes D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t) - B^t \otimes (D\Phi^t(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))) = \\ &= \begin{bmatrix} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t) & O_k & & \dots & & O_k \\ O_k & & & & & \\ \vdots & & (I_{n-1} \otimes D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t) - A^t \otimes (D\Phi^t(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))) & & & \\ O_k & & & & & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $O_k$  é a matriz nula de ordem  $k \times k$ .

Assim, de acordo com resultados padrões (ver [1]), a estabilidade assintótica transversal de  $\Omega_{nk}$  pode ser avaliada através do comportamento do limite

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|P^{\tau-1}P^{\tau-2} \dots P^0\|^{\frac{1}{\tau}}, \quad (9)$$

onde  $P^\tau = (I_{n-1} \otimes D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^\tau) - A^\tau \otimes (D\Phi^\tau(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^\tau))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^\tau)))$ . O limite dado em (9) corresponde ao maior número transversal de Liapunov associado ao atrator  $\Omega_{nk}$  e questões relativas a sua existência são complexas no caso geral.

## 4 Dinâmica Local e Migração Hierárquicas

Como destacado na introdução desse trabalho, vamos considerar o caso em que a dinâmica local e as funções de migração são dadas por uma estrutura com hierarquia (ver item (c) do Teorema abaixo). O comportamento da forma hierárquica está presente na natureza e pode ser caracterizado por vários fatores como, por exemplo, recursos para sobrevivência. Uma

característica matemática importante desse modelo é que a matriz jacobiana associada a esta dinâmica local e a matriz  $D\Phi$  são triangulares inferiores. Consideramos somente o caso em que  $\Phi$  não depende de  $t$ , ou seja,  $g_\ell = 1$ . Com essas hipóteses determinamos uma expressão para os números transversais de Liapunov associados ao atrator sincronizado  $\Omega_{nk}$ , como pode ser visto no Teorema abaixo, o qual corresponde a uma generalização dos resultados estabelecidos em [6].

**Teorema:** Consideremos o sistema (3) descrito na Seção 2, com as seguintes hipóteses adicionais: (a) As matrizes  $\{\tilde{C}^s\}_{s \in [0,1]}$  são simultaneamente diagonalizáveis; (b)  $\Phi$  não depende da variável  $t$ ; (c) para cada  $i = 1, \dots, k$ , as funções  $f_i$  e  $\mu_i$  dependem somente das variáveis  $x_1, \dots, x_i$ ; (d) Existem medidas naturais  $\rho$  e  $\nu_2$  tais que  $\rho$  é  $\mathbf{f}$ -invariante,  $\Omega$  é  $\rho$ -mensurável,  $\text{supp } \rho \subset \Omega_k$  e  $\nu_2$  é  $h$ -invariante; (e)  $\ln^+ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\cdot) \right| \in L^1(\Omega, \rho)$ ,  $\ln^+ \left| 1 - \lambda_j(\cdot) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\cdot) \right| \in L^1(\Omega \times [0, 1], \rho \times \nu_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , onde  $\lambda_j(s)$  são os autovalores, diferentes de 0, da matriz  $\tilde{B}^s = I_n - \tilde{C}^s$  e  $\phi_i$  são as componentes de  $\Phi$ .

Então os números transversais de Liapunov do atrator  $\Omega_{nk}$  são dados por

$$\tilde{\Lambda}_i^j = \exp \int_{\Omega \times [0,1]} \ln \left| 1 - \lambda_j(s) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| (d\rho \times d\nu_2)(\mathbf{x}, s), \tag{10}$$

para  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ . Dessa forma, se  $\sup_{i,j} \tilde{\Lambda}_i^j < 1$ ,  $\Omega_{nk}$  é transversalmente assintoticamente estável.

*Demonstração.* Para cada  $\mathbf{x}_s^0 \in \Omega^k$  e  $s^0 \in [0, 1]$ , os expoentes de Liapunov da órbita  $\mathbf{X}_s^t$  são definidos como os autovalores da matriz  $\Upsilon_{\mathbf{x}_s^0} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (T_{\mathbf{x}_s^0}^{\tau*} T_{\mathbf{x}_s^0}^\tau)^{\frac{1}{2\tau}}$ , onde

$$T_{\mathbf{x}_s^0}^\tau = \prod_{t=0}^{\tau-1} \bigoplus_{j=1}^{n-1} [I_k - \lambda_j(h^t(s^0)) D\Phi(\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t))] D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s^t)$$

e  $T_{\mathbf{x}_s^0}^{\tau*}$  denota a transposta conjugada de  $T_{\mathbf{x}_s^0}^\tau$  (ver [5]). Segue que os expoentes de Liapunov da órbita em questão são dados por

$$\Lambda_i^j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln \left| \left( 1 - \lambda_j(h^t(s^0)) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_i^s) \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_i^s) \right|, \tag{11}$$

para  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$  (ver [9]). O limite acima existe para todo  $(\mathbf{x}_s^0, s^0)$  pertencente a um determinado conjunto  $\mathcal{M} \in \Omega \times [0, 1]$  tal que  $(\rho \times \nu_2)(\mathcal{M}) = 1$ . Além disso o limite não depende de  $(\mathbf{x}_s^0, s^0) \in \mathcal{M}$ . Isso é uma consequência do Teorema de Kingman (ver [14]) e segue das hipóteses de integrabilidade sobre  $\mathbf{f}$  e  $\Phi$ , bem como do fato que a expressão

$$\Gamma_{i,j}^t(s^0, \mathbf{x}_0^s) = \ln \left| \left( 1 - \lambda_j(h^t(s^0)) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0^s)) \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0^s)) \right|$$

corresponde a um co-ciclo sub-aditivo sobre  $\mathbf{f}$ . Esse mesmo teorema garante que os expoentes de Liapunov são da forma

$$\Lambda_i^j = \int_{\Omega \times [0,1]} \ln \left| 1 - \lambda_j(s) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| d(\rho \times \nu_2)(\mathbf{x}, s),$$

$i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ . Isso demonstra o resultado. □

Levando em consideração as hipóteses do Teorema e (11), obtemos

$$\Lambda_i^j = \int_{\Omega \times [0,1]} \ln \left| 1 - \lambda_j(s) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| d(\rho \times \nu_2)(\mathbf{x}, s) + \int_{\Omega} \ln \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| d\rho(\mathbf{x}) = \Delta_i^j + L_i, \tag{12}$$

onde  $L_i$  é o expoente de Liapunov da órbita associado à dinâmica local e  $\Delta_i^j$  é um quantificador que envolve a taxa de variação de migração da referida espécie e os autovalores da matriz  $B^t$ . Definindo  $\tilde{\Delta}_i^j = \exp(\Delta_i^j)$  e  $\tilde{L}_i = \exp(L_i)$ , os números transversais de Liapunov são dados por

$$\tilde{\Lambda}_i^j := \exp(\Lambda_i^j) = \exp(L_i + \Delta_i^j) = \tilde{L}_i \tilde{\Delta}_i^j. \quad (13)$$

Ou seja, é possível separar os números transversais de Liapunov no produto dos números de Liapunov da dinâmica local por um parâmetro que depende do processo de migração associado ao sistema. Esta mesma separação foi encontrada para o caso de uma única espécie (ver [10]), o que permitiu a análise da influência da taxa de migração com relação à possibilidade de sincronização, estudando isoladamente o parâmetro  $\Lambda = \max_{i,j} \{\tilde{\Delta}_i^j\}$ .

Podemos utilizar a decomposição (13) para explorarmos a influência da matriz de acoplamento no comportamento de  $\Lambda$ . Para isso, vamos considerar o caso em que a família  $\{\tilde{C}^s\}_{s \in [0,1]}$  é da forma

$$\tilde{C}^s = sD + (1-s)E, \quad s \in [0,1], \quad (14)$$

onde  $D$  é corresponde à matriz de acoplamento global e  $E$  é a matriz de acoplamento local do tipo dois vizinhos mais próximos (ver [12]). Consideremos o caso  $k = 2$  e as seguintes funções de migração,

$$\mu_i(x_1, x_2) = \frac{\bar{\mu}}{1 + e^{\beta(1-x_i)}}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (15)$$

onde  $0 \leq \bar{\mu} \leq 1$  é a fração migratória máxima, e  $\beta$  determina se a fração de migração é crescente ou decrescente. Vamos considerar o caso em que  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\rho$  é a medida de Lebesgue (o que é verdadeiro para uma grande classe de mapas bidimensionais  $\mathbf{f}$  (ver [16])) e  $\nu_2 = \delta_{s^0}$  é a medida de Dirac concentrada em  $s^0 \in [0,1]$  (o que ocorre, por exemplo, se  $h$  tem  $s^0$  como um ponto fixo atrator). Com essas hipóteses, para cada  $s^0 \in [0,1]$ ,  $\tilde{\Delta}_i^j(s^0)$  pode ser avaliada numericamente. A simulação da Figura 1 apresenta a parte espacial do número transversal de Liapunov  $\Lambda$  pelo parâmetro  $s^0$  para diferentes tamanho de rede e para  $\beta$  grande. Para valores de  $s$  pequenos, observamos que não há possibilidade de ocorrência de sincronização caótica (já que, nesse caso,  $\max_i \{\tilde{L}_i\} > 1$ ). Por outro lado, para valores de  $s$  próximos de 1 há a possibilidade de haver sincronia. Nossas observações sugerem que acoplamento mais forte favorece a sincronização, o que está de acordo com resultados já estabelecidos na literatura ver [7], [12]. O caso  $s = 0$  foi discutido em [12] para uma única espécie, onde observou-se que para valores de  $\beta$  grande há uma forte tendência em desestabilizar o sincronismo.

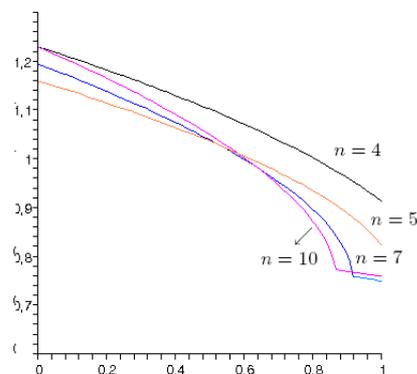


Figura 1:  $\Lambda$  como função do parâmetro  $s^0$  do acoplamento temporal para diferentes sítios.

Analisemos agora um exemplo no qual  $\nu_2$  é equivalente à medida de Lebesgue. Mais precisamente, tomamos  $h(s) = 4s(1-s)$  (ver [15]). Consideramos o sistema com duas espécies e

dinâmica local dada por

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 e^{r_1(1-x_1)} \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 e^{r_2(1-\alpha x_1-x_2)}, \end{cases} \quad (16)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  representam as taxas de crescimento intrínsecas das espécies um e dois respectivamente, e  $0 < \alpha < 1$  mede os efeitos de competitividade da espécie um com a espécie dois (ver referência [2] para detalhes). A função de migração em questão é a dada em (15) e o acoplamento é dado em (14). Estamos interessados em verificar o comportamento de  $\max_{i,j} \{\tilde{\Lambda}_i^j\}$

à medida que  $r_1$  e  $r_2$  assumem valores em que a dinâmica do sistema (1) é caótica. Nesse caso calculamos numericamente o limite dado em (11). As Figuras 2 e 3 apresentam o maior número transversal de Liapunov em função da taxa de crescimento intrínseca  $r_1$  da espécie um. A Figura 2 apresenta o caso dependente do tempo como descrito acima com  $\beta = -1$ . Observamos que existe a possibilidade do estado sincronizado ser assintoticamente estável, para vários valores de  $r_1$ . O mesmo comportamento foi verificado para outros valores de  $\beta$ .

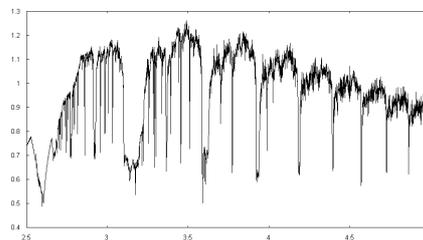


Figura 2: Maior número transversal de Liapunov do sistema como função de  $r_1$ , 8 sítios com acoplamento dependente do tempo,  $r_2 = 5,0095$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\bar{\mu} = 0,9$ ,  $\beta = -1$ .

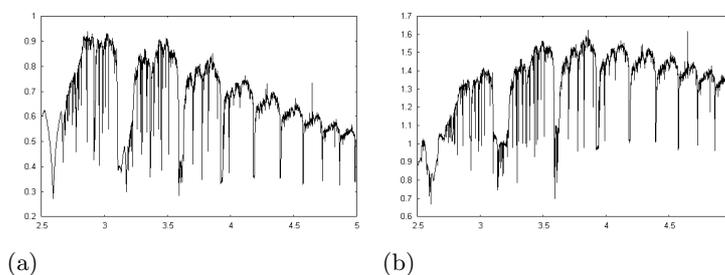


Figura 3: Maior número transversal de Liapunov do sistema como função de  $r_1$ , 8 sítios com acoplamento com os 2 vizinhos mais próximos,  $r_2 = 5,0095$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\bar{\mu} = 0,9$ ,  $\beta = -1$  (a) Acoplamento global. (b) Acoplamento dois vizinhos mais próximos.

A Figura 3 apresenta o maior número transversal de Liapunov versus o  $r_1$  para os mesmos parâmetros considerados na Figura 2, porém com acoplamento global (Figura 3 (a)) e acoplamento dois vizinhos mais próximos (Figura 3 (b)). Observamos que no caso do acoplamento dois vizinhos mais próximos a possibilidade de sincronização diminuiu, e no caso do acoplamento global essa possibilidade aumenta. Comparando estes dados com o caso que o acoplamento é não estacionário vemos que a amplitude do maior número transversal de Liapunov para o acoplamento da forma (14) é intermediário ao global e ao de dois vizinhos mais próximos.

## 5 Conclusão

Apresentamos um critério rigoroso para a estabilidade assintótica de atratores sincronizados para o sistema (3). O caso especial em que funções de dinâmica local e de migração possuem

comportamento de hierarquia foi considerado, juntamente com acoplamento não estacionário. Utilizando as expressões analíticas para os números transversais de Liapunov obtidas em (11) e (12), simulações numéricas foram realizadas. Estas sugerem que o acoplamento mais forte induz maior possibilidade de coerência de oscilações caóticas.

## Referências

- [1] Ashwin, P., J. Buescu, I. Stewart, From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability, *Nonlinearity*, 9 (1996) 703-737.
- [2] Best, J., C. Castillo-Chavez, A-A. Yakubu, Hierarchical Competition in Discrete Time Models with Dispersal, *Fields Institutional of Communications*, 36 (2003) 59-86.
- [3] Cazelles, B., Bottani, S., Stone, L., Unexpected coherence and conservation, *Proc. R. soc. Lond. B*, 268 (2001) 2595-2602.
- [4] Earn, D. J. D., Levin, S. A., Rohani, P., Coherence and Conservation, *Science*, 290 (2000) 1360-1364.
- [5] Eckmann, J. P., Ruelle, D, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Am. Physical Society*, 57 (1985) 617-656.
- [6] Giordani, F.T., Silva, J. A. J., Sincronização em metapopulações com hierarquia na dinâmica local, *TEMA* 8 (2007) 249-258.
- [7] Jost, J., Joy, M. P., Spectral properties and synchronization in coupled map lattices, *Phys. Rev. E*, 65 (2001) 1620-1629.
- [8] Kaneko, K., The coupled map lattice. - Theory and applications of coupled map lattices. pp. 1-49, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [9] Sansone, G., Conti, R, Non-Linear Differential Equations. The Macmillan Company, New York, 1964.
- [10] Silva, J. A. L., Giordani, F. T., Density-dependent Migration and Synchronism in Metapopulations. *Bull. Math. Biol.*, 68 (2006) 451-465.
- [11] Silva, J. A. L., Giordani, F. T., Density-dependent dispersal in multiple species metapopulations. *Math. Biosc. Eng.*, 5 (2008) 843-857.
- [12] Silva, J. A. L., J. Barrionuevo, F. Giordani, Synchronism in population networks with non linear coupling. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, Issue 2,(2010) 1005-1016.
- [13] Solé, R. V., Gamarra, J. P. G., Chaos, dispersal and extinction in coupled ecosystems, *J. Theor. Biol.*, 193 (1998) 539-541.
- [14] Steele, J. M., Kingman's subadditive ergodic theorem, *Annales de l'I. H. P.*, B25, 1 (1989) 93-98.
- [15] Thunberg, H. Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics, *SIAM Review* 43 (2001) 3-30.
- [16] Ugarcovici, I., Weiss, H., Chaotic dynamics of a nonlinear density dependent population model, *Nonlinearity* 17 (2004) 1689-1711.
- [17] Zhan, M., Wang, X., Gong, X., Wei, G. W., Lai, C. H., Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delays systems, *Phys. Rev.*, 68 (2003), 1-5.