ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Identificação de Fontes para a Equação Unidimensional de Difusão-Advecção-Decaimento

Denis Mota de Sousa, Nilson Costa Roberty,
Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ
21941-972 - Rio de Janeiro, RJ
E-mail: denis@con.ufrj.br, nilson@con.ufrj.br

Resumo: *Consideramos o problema inverso de identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advecção-decaimento com coeficientes constantes a partir de informações das extremidades do domínio. É apresentada uma formulação variacional do problema tendo como espaço de funções testes as soluções da equação modificada de Helmholtz homogênea. Considerando o caso em que a fonte é uma função característica de um intervalo obtemos um sistema não-linear e o resolvemos pelo método de Newton. Dois experimentos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência do método proposto e sua aplicabilidade para obter aproximações para fontes de suporte compacto.*

Palavras-chave: *problemas inversos, identificação de fontes, difusão-advecção*

1 Introdução

Sejam $I = (I_1, I_2)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fixos tais que $\alpha, \gamma > 0$. Consideremos os seguintes problemas:

Problema 1 (Problema Direto) *Dadas as funções $f : I \to \mathbb{R}$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, encontre $u'(I_1)$, $u'(I_2)$ tal que u satisfaça*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f, & em \quad I \\ u(I_1) = a_1, u(I_2) = a_2 \end{cases}.$$

Problema 2 (Problema Inverso) *Dados $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, encontre $f : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f, & em \quad I \\ u(I_1) = a_1, u(I_2) = a_2 \\ u'(I_1) = b_1, u'(I_2) = b_2 \end{cases}.$$

O problema direto é bem posto para $f \in L^2(I)$, pois resolver a equação diferencial proposta é um problema bem posto e calcular a derivada de u nos pontos I_1 e I_2 também. Já o problema inverso é altamente mal posto quando não temos informações adicionais sobre f.

Por exemplo, definindo

$$u_1(x) = -x^4 + 2x^2 - 1, \quad \forall\, x \in [-1, 1], \quad \text{e} \quad u_2(x) = -x^6 + 3x^2 - 2, \quad \forall\, x \in [-1, 1],$$

e também

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -u_1''(x) + u_1'(x) + u_1(x) \\ &= -x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 4x - 5, \quad \forall\, x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -u_2''(x) + u_2'(x) + u_2(x) \\ &= -x^6 - 6x^5 + 30x^4 + 3x^2 + 6x - 8, \quad \forall\, x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

temos que o problema inverso associado ao sistema

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f, & \text{em} \quad (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \\ u'(-1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

tem f_1 e f_2 como solução (além de $f \equiv 0$).

A equação de difusão-advecção-decaimento é freqüentemente empregada para modelar o fenômeno de poluição em águas.

Em conseqüência da má colocação dos problemas de identificação de fontes, em geral existem muitas variações relacionadas, como por exemplo identificação de defeitos ou do suporte da fonte. Em [4] existe um grande tratado sobre problemas inversos de identificação de fontes. Em [7] foi investigado o Problema 2 para fontes pontuais. Neste texto vamos investigar principalmente o Problema 2 no caso quem f é uma função característica de um intervalo.

2 Formulação Variacional

Nesta seção vamos apresentar um problema de identificação de fonte equivalente ao Problema 2 e, a partir deste, vamos obter uma forma variacional para o mesmo.

Consideremos os dados do Problema 2. Fazendo a mudança de variável

$$u(x) = e^{\frac{\beta}{2\gamma}x} w(x), \ \forall\, x \in \overline{I},$$

e denotando

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\alpha\gamma + \beta^2}{4\gamma^2}}, \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x}, \quad \forall\, x \in I, \tag{2}$$

$$c_1 = a_1 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_1}, \quad c_2 = a_2 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_2},$$

$$d_1 = b_1 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_1} - \frac{a_1\beta}{2\gamma} e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_1} \quad \text{e} \quad d_2 = b_2 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_2} - \frac{a_2\beta}{2\gamma} e^{-\frac{\beta}{2\gamma}I_2},$$

temos que o Problema 2 equivale a

Problema 3 *Dados c_1, c_2, d_1, d_2 como definidos anteriormente, encontre $g : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -w'' + \kappa^2 w = g & \text{em} \quad I \\ w(I_1) = c_1, \ w(I_2) = c_2 \\ w'(I_1) = d_1, \ w'(I_2) = d_2 \end{cases},$$

pois, obtendo g no Problema 3, podemos obter f por (2). Note que κ definido em (1) é um número real, pois $\alpha, \gamma > 0$.

Consideremos o espaço das funções testes definido por

$$V(I) = \{v \in L^2(I) \mid -v'' + \kappa^2 v = 0 \quad \text{em} \quad I\}.$$

Multiplicando g por uma função de $V(I)$ e integrando sobre I, obtemos

$$\int_I gv \;=\; \int_I (-w'' + \kappa^2 w)v \;=\; \int_I \kappa^2 wv - w''v \;=\; \int_I wv'' - w''v.$$

Fazendo uma integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}\int_I wv'' - vw'' &= wv'\Big|_{I_1}^{I_2} - \int_I v'w' - \left(vw'\Big|_{I_1}^{I_2} - \int_I v'w' \right) \\ &= wv' - vw'\Big|_{I_1}^{I_2} \\ &= c_2 v'(I_2) - d_2 v(I_2) - c_1 v'(I_1) + d_1 v(I_1).\end{aligned}$$

Assim, definindo

$$B(g,v) = \int_I gv, \quad \forall\, v \in V(I)$$

e

$$L(v) = c_2 v'(I_2) - d_2 v(I_2) - c_1 v'(I_1) + d_1 v(I_1), \quad \forall\, v \in V(I),$$

temos que se g é solução do Problema 3 então g é solução de

Problema 4 (Formulação Variacional) *Dados B e L como definidos anteriormente, encontre g tal que*

$$B(g,v) = L(v), \quad \forall\, v \in V(I). \tag{3}$$

Sabemos que, definindo $v_1(x) = e^{\kappa x}$ e $v_2(x) = e^{-\kappa x}$, $\forall\, x \in I$, temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $V(I)$. Como B e L são lineares com respeito ao espaço $V(I)$, temos que resolver o Problema 4 é equivalente a resolver o mesmo problema trocando a equação variacional (3) pelo sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B(g,v_1) &=& L(v_1) \\ B(g,v_2) &=& L(v_2) \end{array} \right. . \tag{4}$$

Observação 1 *Se f é uma combinação linear de duas funções $f_1, f_2 \in L^2(I)$ conhecidas, isto é, se existem $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2$, então podemos obter f pelo sistema (4) se, e somente se,*

$$\det \begin{pmatrix} B(g_1,v_1) & B(g_2,v_1) \\ B(g_1,v_2) & B(g_2,v_2) \end{pmatrix} \neq 0,$$

onde g_i, para $i = 1,2$, é definida por $g_i(x) = \dfrac{1}{\gamma} f_i(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x}$, $\forall\, x \in I$.

3 Fontes Características de um Intervalo

Como vimos anteriormente, o Problema 2 é mal posto quando procuramos f em espaços gerais. Apresentaremos nesta seção uma classe de funções mais interessante do que o caso que foi apresentado na Observação 1 e que podem ser recuperadas no Problema 2.

Consideremos o Problema 2 sabendo-se que f é uma *função característica* de um intervalo, isto é, que $f = \chi_{(\xi_1,\xi_2)}$, onde

$$\chi_{(\xi_1,\xi_2)}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & , \text{ se} & x \in (\xi_1,\xi_2) \\ 0 & , \text{ se} & x \notin (\xi_1,\xi_2) \end{array} \right. , \quad \forall\, x \in I,$$

para algum par $\xi_1, \xi_2 \in I$ desconhecido. Nossa estratégia é explorar o sistema (4) para obtermos ξ_1 e ξ_2 e assim determinar f.

Por (2), temos

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} \chi_{(\xi_1,\xi_2)}(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x}, \quad \forall\, x \in I. \tag{5}$$

Note que,

$$B(g,v_1)=\frac{1}{\gamma}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)x}\,dx=\frac{1}{\gamma\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)}\left(e^{\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2}-e^{\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1}\right),$$

$$B(g,v_2)=\frac{1}{\gamma}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)x}\,dx=\frac{1}{\gamma\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)}\left(e^{\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2}-e^{\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1}\right),$$

$$\begin{aligned} L(v_1) &= c_2\kappa e^{\kappa I_2}-d_2e^{\kappa I_2}-c_1\kappa e^{\kappa I_1}+d_1e^{\kappa I_1} \\ &= (c_2\kappa-d_2)\,e^{\kappa I_2}-(c_1\kappa-d_1)\,e^{\kappa I_1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L(v_2) &= -c_2\kappa e^{-\kappa I_2}-d_2e^{-\kappa I_2}+c_1\kappa e^{-\kappa I_1}+d_1e^{-\kappa I_1} \\ &= -(c_2\kappa+d_2)\,e^{-\kappa I_2}+(c_1\kappa+d_1)\,e^{-\kappa I_1}. \end{aligned}$$

Assim, definindo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ por

$$F(s,t)=\left(\frac{e^{\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)t}-e^{\left(\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{\gamma\kappa-\frac{\beta}{2}},\frac{e^{\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)t}-e^{\left(-\kappa-\frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{-\gamma\kappa-\frac{\beta}{2}}\right),\quad \forall\,(s,t)\in\mathbb{R}^2,$$

e

$$(p_1,p_2)=\left((c_2\kappa-d_2)\,e^{\kappa I_2}-(c_1\kappa-d_1)\,e^{\kappa I_1},-(c_2\kappa+d_2)\,e^{-\kappa I_2}+(c_1\kappa+d_1)\,e^{-\kappa I_1}\right),$$

resolver o sistema em (4), neste caso, equivale a resolver a equação não-linear

$$F\,(s,t)=(p_1,p_2), \tag{6}$$

o que pode ser feito usando o método de Newton, isto é, iterando

$$(s_{n+1},t_{n+1})=(s_n,t_n)-J_F\,(s_n,t_n)^{-1}\left(F\,(s_n,t_n)-(p_1,p_2)\right),$$

onde $J_F(s,t)$ é a matriz Jacobiana de F no ponto (s,t) e com (s_0,t_0) adequado.

A aplicabilidade do método de Newton para a resolução da equação não-linear (6) é assegurada pelo teorema apresentado a seguir.

Teorema 1 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ aberto e convexo e $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$ de classe $C^1(\Omega)$. Se, para todo $(s,t)\in\Omega$, temos $J_F(s,t)$ não-singular e para alguma norma $\|\cdot\|$ do $\mathbb{R}^2$ e algum $(s_0,t_0)\in\Omega$ valem as seguintes condições:*

1. *exite $C_1>0$, tal que*

$$\|J_F(s_1,t_1)-J_F(s_2,t_2)\|\le C_1\,\|(s_1,t_1)-(s_2,t_2)\|,$$

   para todo par $(s_1,t_1),(s_2,t_2)\in\Omega$;

2. *existe $C_2>0$ tal que*

$$\left\|J_F(s,t)^{-1}\right\|\le C_2,$$

   para todo $(s,t)\in\Omega$;

3. *definindo-se*

$$C_3=\left\|J_F(s_0,t_0)^{-1}\,F(s_0,t_0)\right\|,$$

   temos que $C_1C_2C_3<\frac{1}{2}$;

4. definindo-se $R = 2C_1$ temos que

$$\overline{B_R(s_0,t_0)} \;=\; \{(s,t)\in\Omega \mid \|(s_0,t_0)-(s,t)\| \le R\} \;\subset\; \Omega;$$

então existe apenas um $(\xi_1,\xi_2)\in\overline{B_R(s_0,t_0)}$ tal que $F(\xi_1,\xi_2)=(p_1,p_2)$ e o método de Newton converge com estimativa de erro dada por

$$\|(\xi_1,\xi_2)-(s_n,t_n)\| \le R\,(C_1C_2C_3)^{2^n-1},$$

para todo $n = 0,1,2,\ldots$

Uma prova para este teorema pode ser encontrada em [6].

Tomando-se

$$\Omega \;=\; \left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid I_1 < s < t < I_2\right\},$$

a norma $\|\cdot\|_2$, definida por

$$\|(s,t)\|_2 \;=\; |s|^2+|t|^2, \quad \forall\,(s,t)\in\mathbb{R}^2,$$

e (s_0,t_0) qualquer em Ω, podemos assegurar pelo Teorema 1 que o método de Newton aplicado a equação não-linear (6) converge para a única solução do sistema.

A dependência contínua da solução da equação não-linear (6) em relação aos dados de entrada do Problema 2 pode ser verificada usando o Teorema da Função Inversa ([2]).

Observação 2 *Da mesma forma, podemos considerar o Problema 2 para fontes da formas $f = C\chi_{(\xi_1,\xi_2)}$ com $C\neq 0$ fixo.*

4 Experimentos

Para obter dados de entrada para o Problema 2 discretizamos o intervalo $[0,5]$ em 1002 pontos $0 = x_0, x_1, \ldots, x_{1000}, x_{1001} = 5$ tais que $x_{i+1}-x_i = h$, para todo $i = 0,\ldots,1001$ e utilizamos o método de Galerkin para obtermos uma aproximação u_h para a solução do Problema 1. Assim obtemos aproximações para $u'(0)$ e $u'(5)$ por

$$u_h'(0) = \frac{u_h(x_1)-u_h(0)}{h} \quad \text{e} \quad u_h'(5) = \frac{u_h(5)-u_h(x_{1000})}{h}$$

Sabemos que, na medida em que os termos α e β crescem, a qualidade da aproximação de u pelo método de Galerkin piora, portanto nos nossos experimentos não tomamos valores altos para α e β.

Um outro fato importante a ser lembrado é que não pode obter f no Problema 2 com alta precisão pois os valores $u_h'(0)$ e $u_h'(5)$ não são exatamente os dados de entrada.

4.1 Recuperando uma fonte característica

Neste experimento testamos o método proposto para resolver o Problema 2. Obtemos os dados de entrada $u_h'(0) = 0.119387997616$ e $u_h'(5) = -0.0417667576086$ resolvendo o Problema 1 com parametros $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.50$ e $\gamma = 0.75$, com condições de bordo $u(0) = u(5) = 0$ e termo fonte $f = \chi_{(1,\frac{3}{2})}$.

Como critério de parada para a iteração usamos $\|F(s_n,t_n)-(p_1,p_2)\|_2 < 10^{-16}$. Foram realizadas 9 iterações e o método nos deu a solução

$$\overline{f} = \chi_{(1.00361424631,\,1.50343624273)}$$

para o problema.

Na Figura 1 podemos ver os gráficos da função f proposta e u_h obtida pelo método de Galerkin. A Tabela 1 mostra os dados obtidos nas iterações do método de Newton.

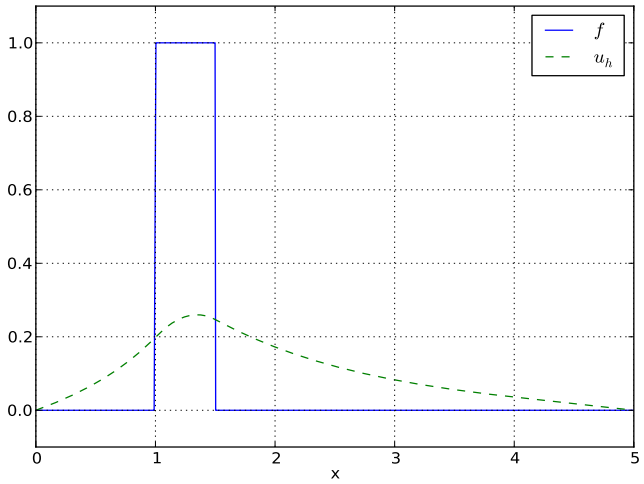

Figura 1: Gráficos de $f = \chi_{\left(1,\frac{3}{2}\right)}$ e de u_h obtida para esta fonte.

n	s_n	t_n	$\|F(s_n,t_n)-(p_1,p_2)\|_2$
0	0.0	5.0	64.4624026182
1	0.629226733664	3.7012301835	22.0875169921
2	1.10992478833	2.60397962383	6.31463193126
3	1.23642080097	1.92215763709	1.22938016452
4	1.04721611961	1.57603904035	0.17198388291
5	1.00531697895	1.50600312076	0.0054430311686
6	1.00361592274	1.5034390563	6.47980399233e-06
7	1.00361424632	1.50343624273	8.46333531145e-12
8	1.00361424631	1.50343624273	6.66278359382e-16
9	1.00361424631	1.50343624273	1.38777878078e-17

Tabela 1: Dados obtidos nas iterações do método de Newton para o problema com fonte $f = \chi_{\left(1,\frac{3}{2}\right)}$.

4.2 Obtendo uma aproximação por uma função característica

Neste experimento visamos explorar a dependência contínua da solução da equação não-linear (6) em relação aos dados de entrada do Problema 2 para obter uma aproximação por fonte característica para uma fonte com suporte compacto. Obtemos os dados de entrada $u_h'(0) = 0.633236426522$ e $u_h'(5) = -0.216290556828$ resolvendo o Problema 1 com parametros $\alpha = 0.25$, $\beta = -0.75$ e $\gamma = 1.0$, com condições de bordo $u(0) = u(5) = 0$ e termo fonte

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{11}{10}\,(x-2)\,(x-4) & , \quad \text{se} \quad x \in (2,4) \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x \notin (2,4) \end{cases} , \quad \forall\, x \in (0,5). \tag{7}$$

Como critério de parada para a iteração usamos $\|F(s_n,t_n)-(p_1,p_2)\|_2 < 10^{-14}$. Foram realizadas 7 iterações e o sistema nos deu

$$\overline{f} = \chi_{(2.2807889677,\ 3.74992747306)}$$

como a aproximação de f.

Na Figura 1 podemos ver os gráficos da função f proposta, da u_h obtida pelo método de Galerkin e da $\overline{f}$. Como podemos ver, a aproximação $\overline{f}$ é bem razoável para a f proposta.

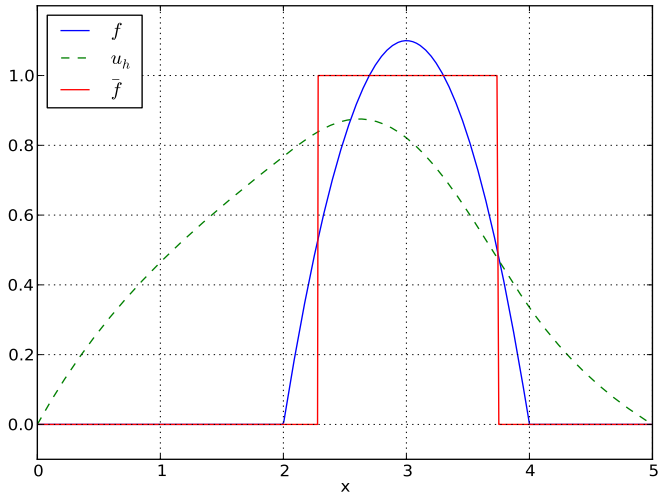

Figura 2: Gráficos de f descrita em (7), de u_h obtida com esta fonte e da aproximação $\overline{f}$.

5 Conclusão

O problema inverso de identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advecção-reação com coeficientes constantes a partir de informações das extremidades do domínio, apesar de extremamente mal posto, pode ser resolvido em casos específicos como, por exemplo, quando sabemos se a fonte é uma combinação linear de duas funções conhecidas ou se ela é uma função característica de um intervalo.

A técnica apresentada para obter fontes características de um intervalo, além de muito eficiente, também pode ser útil para encontrar aproximações de funções de suporte compacto no classes das funções características de um intervalo.

Referências

[1] C. J. S. Alves, N. F. M. Martins, N. C. Roberty, Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements, *Inverse Problems & Imaging*, 2 (2) (2009) 275-294.

[2] R. Cipolatti, "Cálculo Avançado I", IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

[3] A. El Badia, T. Ha Duong, Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements, *Inverse Problems*, 14 (1998) 883-891.

[4] V. Isakov, "Inverse Source Problems", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 34, AMS, 1989.

[5] C. Johnson, "Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method", Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[6] R. Kress, "Numerical Analysis", Springer, New York, 1998.

[7] A. Rap, L. Elliott, D.B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen, An inverse source problem for the convection-diffusion equation, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 16 (2) (2006) 125-150.