ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Modelagem e Implementação da Medida Projetiva Quântica no Ambiente VPE-qGM

Adriano Kurz Maron* **Anderson Boettge Pinheiro†**
Centro Politécnico, UCPEL,
96010-000, Rua felix da Cunha, 412, Pelotas, RS
E-mail: {maron,abpinheiro}@ucpel.tche.br

Renata Hax Sander Reiser
Instituto de Matemática e Física, UFPEL
59072-970, Campus Universitário s/n, Pelotas, RS
E-mail: reiser@ufpel.edu.br.

RESUMO

O ambiente VPE-qGM (*Visual Programming Environment for qGM*) [2] está em desenvolvimento visando o suporte à modelagem e simulação de algoritmos da Computação Quântica (*CQ*) [3], considerando as abstrações do modelo qGM (*Quantum Geometric Machine Model*) [6] como semântica para interpretação de operações quânticas. O ambiente viabiliza a modelagem e simulação sequencial de aplicações quânticas através da estrutura de processos e macros, diferenciando-o dos demais simuladores gráficos [5]. Estendendo as funcionalidades do *VPE-qGM*, este trabalho introduz os conceitos e construtores necessários para suporte à modelagem e simulação da operação de medida quântica, mais especificamente, a **medida projetiva**.

A *CQ* considera o *qubit* (*quantum bit*) como unidade básica de informação, representado em um espaço vetorial complexo com produto interno (espaço de Hilbert), denominado espaço de estados do sistema. Aos estados estão associados coeficientes complexos que quantificam as correspondentes probabilidades de ocorrência, conforme descrito na expressão genérica:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{1}$$

De acordo com [3, 4], a medida quântica é a operação para observação do estado corrente de um sistema quântico. A medida projetiva é uma das formas de aplicação da medida quântica, sendo composta por uma coleção de operadores de projeção, os quais colapsam o sistema em um estado específico. Uma medida projetiva para o *qubit* $|\psi\rangle$ é composta por dois operadores:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

O operador P_0, ao ser aplicado ao vetor de estado de $|\psi\rangle$, descrito por $(\alpha, \beta)^t$, irá resultar em $(\alpha, 0)^t$ com probabilidade $|\alpha|^2$. Analogamente, a aplicação de P_1 resulta em $(0, \beta)^t$ com probabilidade $|\beta|^2$. A escolha da projeção está relacionada com a distribuição de probabilidade do vetor de estado do sistema no estado imediatamente anterior a operação de medida.

A simulação de um sistema quântico invariavelmente necessita de suporte à operação de medida. No *VPE-qGM*, a medida projetiva é modelada através de dois construtores principais: (*i*) Soma Não Determinística (*SND*) aplicado sobre os operadores de projeção requeridos pelo espaço de estados; (*ii*) Operador de Probabilidade, o qual calcula o estado final do sistema com a correspondente probabilidade.

A construção dos operadores de projeção na interface gráfica de edição do ambiente é realizada de forma automática e considera dois parâmetros, informados manualmente através de

*Bolsista de Iniciação Científica BIC/FAPERGS
†Bolsista de Iniciação Científica BIC/UCPEL

campos específicos: a quantidade total de *qubits* do sistema e a identificação dos *qubits* serão efetivamente medidos. Após a construção dos operadores de projeção, o ambiente automaticamente aplica o construtor *SND*. A construção do operador de probabilidade (*Prob*) considera apenas a quantidade total de *qubits* do sistema (informado manualmente). Por fim, tem-se a sequencialização entre o operador *SND* (aplicado às projeções) e o operador *Prob*.

Durante a simulação, a execução do operador *SND* implica na realização dos cálculos que determinam qual projeção será efetivamente executada. Por utilizar uma construção não determinística, pressupõe-se uma aleatoriedade na escolha da projeção a ser executada. Porém, o comportamento dos sistemas quânticos considera que a escolha da projeção é **influenciada** pelas probabilidades do vetor de estado, sem perder a essência aleatória, permitindo a escolha de projeções para estados com menor probabilidade associada.

Para modelagem desse comportamento no *VPE-qGM*, consideram-se as seguintes etapas: (i) cálculo das probabilidades associadas a cada estado, gerando um vetor de probabilidades $(p_0, p_1, ..., p_{2^n} - 1)$; (ii) criação de intervalos numéricos (I_n) para cada estado do sistema, estabelecidos a partir dos k primeiros valores decimais de cada uma das probabilidades previamente calculadas, conforme definido pela expressão:

$$\begin{cases} [0; p_1 * 10^k], & para\ I_0 \\ [(p_{n-1} * 10^k) + 1; ((p_{n-1} * 10^k) + 1) + (p_n * 10^k)], & paraI_n; \end{cases} \tag{3}$$

(iii) criação de uma matriz M com os intervalos correspondentes aos estados afetados por cada projeção; (iv) geração de um valor aleatório α pela aplicação da função *random.randint(0, 1000)* [1] e identificação do intervalo em que está contido. Em suma, será escolhida a projeção referente à linha que contém o intervalo associado ao valor de α. Por fim, é executado o operador *Prob* que irá calcular a probabilidade de ocorrência e o estado final da aplicação.

Exemplificando, tem-se um sistema quântico de dois *qubits* com o seguinte espaço de estados: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Considera-se que a operação de medida é aplicada sobre o primeiro *qubit* do sistema. Para esses parâmetros, a modelagem no *VPE-qGM* gera uma SND aplicada a dois operadores de projeção: $P_0 \otimes Id$ e $P_1 \otimes Id$, que atuam sobre diferentes estados do espaço de estados. Para determinar a projeção a ser executada, o espaço de estados é dividido a partir do primeiro *qubit* de cada estado, gerando dois conjuntos distintos: E1=$\{|00\rangle, |01\rangle\}$ e E2=$\{|10\rangle, |11\rangle\}$.

Se o vetor de estado do sistema for $(0.185, 0.365, 0.547, 0.730)^t$, os intervalos para cada um dos estados, gerados na etapa (ii) serão os seguintes: $|00\rangle \rightarrow [0; 34]$, $|01\rangle \rightarrow [35; 168]$, $|10\rangle \rightarrow [169; 467]$ e $|11\rangle \rightarrow [468; 1000]$. A partir desses intervalos, a etapa (iii) irá criar a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} m_{00}, & m_{01} \\ m_{10}, & m_{11} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [0; 34], & [35; 168] \\ [169; 467], & [468; 1000] \end{bmatrix}, \tag{4}$$

onde $M_0 = \{m_{00}, m_{01}\}$ e $M_1 = \{m_{10}, m_{11}\}$ representam os conjuntos de intervalos associados às projeções $P_0 \otimes Id$ e $P_1 \otimes Id$, respectivamente. Por fim, se na etapa (iv) for gerado um valor, por exemplo, $\alpha = 510$, será escolhida a projeção $P_1 \otimes Id$, já que α está no intervalo $[468; 1000]$.

Finalizando a medida quântica, tem-se a execução do operador *Prob*, que apresentará o estado final $|\psi\rangle = 0,599|10\rangle + 0,800|11\rangle$ com aproximadamente 83% de probabilidade de ocorrência.

Palavras-chave: *Computação Quântica, Modelagem da Medida Projetiva, Simulação Quântica.*

Referências

[1] M. Brown, Python: The Complete Reference, Osborne/McGraw-Hill, 2001.

[2] A.K. Maron, R.H.S. Reiser, A.C. Yamin e M.L. Pilla, Aplicações do Protótipo VPE-qGM: Simulação via Software do Algoritmo de Grover, *Anais do WSCAD/WIC.*,(2009), 1-4.

[3] M. Nielsen e I. Chuang, Computação Quântica e Informação Quântica, Bookman, 2005.

[4] R. Portugal, C. Lavor, L.M. Carvalho e N. Maculan, Uma introdução à Computação Quântica, Notas em Matemática Aplicada - SBMAC, SP, 2004.

[5] Quantiki, Quantum Information Wiki and Portal, Singapore: Centre for Quantum Technologies of the National University of Singapore, 2009. (disponível por WWW em http://www.quantiki.org)(mar.2010)

[6] R. Reiser, R. Amaral e A. Costa, Quantum Computing: Computation in Coherence Spaces, Proceedings of WECIQ 2007, 2007, UFCG, 1–10.