ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Sobre as Frequências de uma Viga Euler-Bernoulli Segmentada com Dispositivos Anexados

Daniela de R. Tolfo*
Departamento de Matemática, UFSM
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: danitolfo.cp@hotmail.com

Rosemaira D. Copetti
Universidade Federal de Santa Maria - Departamento de Matemática
97105-900, Campus Camobi, Santa Maria, RS
E-mail: rmaira@smail.ufsm.br

RESUMO

A teoria para o estudo de vibrações em vigas do tipo Euler-Bernoulli, permite representar matematicamente o problema através de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que envolve suas componentes físicas. A viga pode ser modelada contendo propriedades físicas distintas em cada segmento de sua estrutura, assim como diferentes dispositivos anexados, tais como massas, amortecedores, molas, etc, essas situações caracterizam uma viga segmentada.

Consideramos uma viga Euler-Bernoulli uniforme de comprimento L com 3 segmentos, amortecimento interno nulo, sendo cada segmento desta viga governado pela equação

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}v_i(t,x) + m\frac{\partial^2 v_i(t,x)}{\partial t^2} = 0, \qquad x_{i-1} < x < x_i,\ i = 1:3 \tag{1}$$

de forma que $v_i(t,x)$ representa o deslocamento transversal da viga para o i-ésimo segmento $[x_{i-1}, x_i]$, assumindo $x_0 = 0$ e $x_3 = L$, onde

$$m = \rho A,$$

com os parâmetros ρ densidade, A área da seção transversal, E o módulo de Young e I o momento de inércia da área.

Pelo método modal, supõe-se uma solução para (1) da forma $v_i(t,x) = e^{\lambda t}X_i(x)$. Usando uma formulação matricial, $X_i(x)$ pode ser escrita como combinação linear dos elementos de uma base

$$\Psi_i = [\phi_{1i}(x), \phi_{2i}(x), \phi_{3i}(x), \phi_{4i}(x)]\,,$$

para cada segmento da viga, com escalares d_{1i},d_{2i}, d_{3i} e d_{4i}, resultando

$$X_i(x) = \Psi_i d_i, \quad d_i = [d_{1i} \quad d_{2i} \quad d_{3i} \quad d_{4i}]^T.$$

Para determinadas condições de contorno, obtém-se uma matriz Φ, cujas entradas são as funções que compõem as bases de cada segmento e uma matriz $\mathbf{B}$ que carrega informações acerca das condições de contorno e de continuidade da viga nos pontos intermediários. Desta forma obtém-se um sistema dependente de λ, dado por

$$(\mathbf{B}\Phi)\,\mathbf{d} = 0, \qquad \mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T. \tag{2}$$

*bolsista de Iniciação Científica Fapergs, n°08505962

Tabela 1: Valores de $\varepsilon_i^4 = -\frac{m}{EI}\lambda_i^2$

	Sem dispositivos intermediários	Método descrito [1], [4]
$i = 1$	1.87510406	1.87506889
$i = 2$	4.69409113	4.69007181
$i = 3$	7.85475748	7.81254230

A proposta em [1] e [4] é que a base Ψ_i seja uma base gerada pela solução do problema de valor inicial,

$$\begin{gathered} \mathbf{h}^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 \mathbf{h}(x) = 0, \\ \mathbf{h}(0) = 0, \quad \mathbf{h}'(0) = 0, \quad \mathbf{h}''(0) = 0, \quad \mathbf{h}'''(0) = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

onde $\varepsilon^4 = -\frac{m}{EI}\lambda^2$. As frequências da viga são obtidas quando faz-se $det(\mathbf{B}\Phi) = 0$.

O método proposto em [1] e [4] torna a matriz Φ mais esparsa, devido as condições iniciais de $\mathbf{h}(x)$, reduzindo os cálculos para obtenção das frequências, o que é uma vantagem em relação a escolha de outra base de soluções.

Gürgöze [2] propõe a partir de valores conhecidos da massa anexada M e dos pontos x_m e x_k, localização da massa e da mola anexadas respectivamente, buscar o coeficiente de rigidez K para o qual as frequências permaneçam, praticamente as mesmas daquelas sem dispositivos intermediários.

Neste trabalho, utilizamos a teoria descrita acima, para uma viga de comprimento L com diferentes condições de contorno. Em particular, para uma viga fixa-livre com $L = 1$, $M = 0.1m$, $x_k = 0.1$, $x_m = 0.1$ e $K = 0.4129EI$ obtivemos os valores de $\varepsilon_i^4 = -\frac{m}{EI}\lambda_i^2$ dados na tabela 1. Observamos uma concordância satisfatória entre os resultados obtidos, quando comparados com os de [2].

Para as simulações foi utilizado o aplicativo Maple 10.

Palavras-chave: *Viga Euler-Bernoulli Segmentada, Base Fundamental, Método Modal*

Referências

[1] R.D. Copetti, J.C.R. Claeyssen, and T. Tsukazan, Modal Formulation of Segmented Euler-Bernoulli Beams, *Mathematical Problems in Engineering*, 2007 (2007) 18 pages, doi:10.1155/2007/36261.

[2] M. Gürgöze, S. İnceoğlu, Preserving the Fundamental Frequencies of Beams Despite Mass Attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 235(2) (2000) 354-359.

[3] S.G. Kelly, "Advanced Vibration Analysis", Taylor and Francis Group, New York, 2007.

[4] T. Tsukazan, The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section, *Journal of Sound Vibration*, 281 (2005) 1175-1185.