ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

A DIFICULDADE NA DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CABO INEXTENSÍVEL

Camila Gonçalves Costa*
Universidade Estadual Paulista, FCT, UNESP
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: camilagoncalves89@hotmail.com

Messias Meneguette Junior
Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: messias@fct.unesp.br

RESUMO

A equação envolvida neste trabalho é a equação do movimento de um cabo inextensível restrito a um plano, dada em todo tempo t pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais não lineares:

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T cos\theta + N sen\theta)$$
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T sen\theta - N cos\theta) \tag{1}$$

$$\text{Onde: } \frac{\partial x}{\partial s} = cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = sen\theta \quad \text{e} \quad N = C\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}$$

Onde s denota o comprimento do arco ao longo do cabo, N é o shear, T a tensão, C a constante de rigidez flexível, ρ é a densidade linear e θ é o angulo com a horizontal, sendo tambem função de s e t. As soluções são $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$.

Esta é uma equação cuja discretização não é encontrada nos livros e nem mesmo na literatura. A falta de material levou à propositura de uma discretização por diferenças finitas. Entretanto, muitas manipulações foram necessarias para eliminar incógnitas e principalmente para se obter um sistema adequado, em banda, para a sua solução. Como passo futuro a ser perseguido está o uso do método das linhas, ou seja, será considerada apenas a discretização espacial, usando métodos para problemas de valor inicial para a integração do sistema de equações ordinarias. Aqui outras dificuldades, tais como stifness, deverão ser enfrentadas e superadas.

Assim, neste trabalho, a discretização dessas equações é feita em dois passos: primeiro discretizamos em relação à variável espacial s deixando o tempo t contínuo e depois em relação à variável temporal t.

Para discretizar em relação à variável espacial, utilizamos o método da discretização em segmentos orientados que consiste em discretizar a equação do cabo em n segmentos de tamanho h, onde cada segmento tem massa ρh. Esse precedimento resulta em uma série de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de segunda ordem. Uma dificuldade aparece aqui, pois os segmentos devem ser unidos por imposição numerica. Diferenças finitas são usadas aqui, mais especificamente é proposta a fórmula regressiva e a fórmula centrada. O procedimento numérico a ser apresentado no trabalho buscou eliminar ao máximo as incógnitas, pela manipulaçao das

*bolsista de Iniciação Científica Fapesp

linhas. As condições de fronteira são fixas e equivalem a considerar o cabo fixo rigidamente pelas extremidades.

Quanto à discretização em relação à variável temporal, foram necessarias várias tentativas, incluindo médias de algumas variaveis e manipulações por linearização visando a solução de um sistema que fornece apenas os valores no tempo $j+1$. Condições iniciais são fixadas para uma conformação inicial do cabo. Aqui ocorreu a principal dificuldade pois o resultante contém muito mais incógnitas $(3n-8)$ que equações $(n-4)$. Um método novo foi desenvolvido considerando condições discretas de inextensibilidade. Considerando adequadamente as relações em cada segmento e sua relação com os fronteiriços, foi possivel acoplar as condições discretas de inextensibilidade às primeiras equações. A intercalação das equações de maneira cuidadosa e mesmo engenhosa resultou em uma matriz esparsa em banda por blocos.

A equação tem solução uma curva, de certa forma parametrizada e isto também dificulta a solução numérica do problema. Uma figura exagerada procura ilustrar este aspecto.

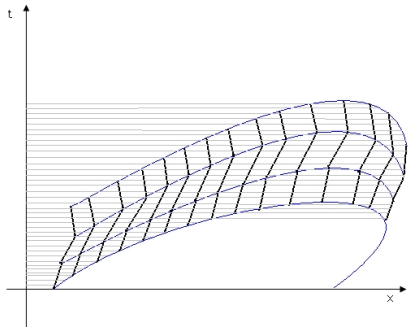

Figura 1: "Malha"para a equação do Cabo

Suponha uma deformação inicial do cabo e que se quer acompanhar seu comportamento no tempo. A posição dos pontos da malha varia conforme a parametrização.

Como trabalho futuro esta sendo estudada a comparação do resultado numérico com a dinâmica esperada, possibilitando uma checagem visual: parece que o excesso de linearização e a introdução das condiçoes discretas de inextensibilidade trazem degradação na qualidade da solução. Um proximo passo será considerar algumas variáveis de forma não linear como elas aparecem, mas com o uso de predição correção. Alem disso, está previsto o uso do método das linhas na esperança de que por meio de passos variaveis, possa ser obtida melhor precisão e estabilidade. Outro aspecto a ser tratado será a introdução da condição de extensibilidade nas equações, pois assim parece que outras condições poderão ser exploradas de forma a fornecer mais equações para as incógnitas que já existem. Intuitivamente o tratamento do problema extensivel deve numericamente ser mais consistente, uma vez que o número de equações e incógnitas parecem ser mais próximos. Isto é meio paradoxal pois o problema extensível sempre foi considerado mais dificil.

Palavras-chave: *Discretização, Equação do Cabo, Diferenças Finitas*

Referências

[1] Benhammouda, B.: "Stability of Finite-Difference Schemes for an Initial-Value Problem in Partial Differential Equations". MSc. Report. Linacre College, Oxford University, 1985.

[2] Cuminato, J. A.; Meneguette, M.: "Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas". ICMC/USP - São Carlos, 2000.