ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Solução de Equações Dinâmicas Através da Transformada de Laplace em Escalas Temporais

Camila Aversa Martins* **Luciano Barbanti****

Depto de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
Email: camila71078@aluno.feis.unesp.br, barbanti@mat.feis.unesp.br

RESUMO

O objetivo é estudar através do cálculo em escalas temporais, o método de solução de equações através da transformada de Laplace.

O cálculo em escalas temporais é a integração natural da teoria das equações a diferença e das equações diferenciais, através da unificação do cálculo diferencial e integral com o cálculo de diferenças finitas dando assim um formalismo para o estudo de sistemas dinâmicos híbridos discreto-contínuos (para alguns destes sistemas ver [1]). Foi introduzido em 1988 por S. Hilger [5] e é amplamente usado em áreas que requerem a modelagem de problemas com tratamento de dados discretos e contínuos simultaneamente.A notação em [5] será usada livremente neste resumo.

Uma escala temporal é um conjunto fechado T dos reais: pode ser o próprio $\mathbb{R}$ (caso contínuo), o conjunto $\mathbb{Z}$ (caso discreto clássico das equações a diferença), ou então, por exemplo, T = $\{1/2^k; k\in \mathbb{N}\}$, ou o conjunto de Cantor, etc.

Os três operadores básicos do calculo em escalas temporais são: os operadores shift à direita, shift à esquerda e o operador de densidade (à direita), respectivamente:

$$\sigma(t) = inf\{s \in T: s > t\}; \quad \rho(t) = sup\{s \in T: s < t\}; \quad \mu(t) = \sigma(t) - t.$$

A derivada (à direita), em escalas temporais é:

$$f^{\Delta}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{s\to t, s\in T} \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} & se \;\; \mu(t) = 0 \\ \dfrac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} & se \;\; \mu(t) \neq 0 \end{cases}$$

A integral pode ser definida como a anti-derivada de funções. O âmbito das funções integráveis no cálculo em escalas temporais é o das funções regradas contínuas à esquerda [2].

Várias equações como sistemas dinâmicos em escalas de tempo são dados em [1]. Uma delas nos deterá especialmente será a de assim chamada equações à q-diferença (com $q > 1$),

$$\mathrm{y(qt) - y(t) = (q-1)tp(t)y(t)} \quad \text{com} \quad T = q^{N_0} = \{q^k;\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \text{e } \ p \ \text{ polinômio.}$$

A transformada de Laplace quando T= $\mathbb{R}$, como instrumento de solução de EDO, é bem conhecida [3]. Esta transformada pode ser definida para funções em escalas temporais e usa a mesma tabela para qualquer que seja T.

Estabelecemos, agora, o seguinte resultado para qualquer escala temporal T (resultado bem conhecido para T= $\mathbb{R}$). Seja o polinômio generalizado em escalas temporais $h_1(t, 0)$.

---

*Aluna de Iniciação Científica
**Professor Orientador

O P.V.I.,

$$f^{\Delta} = h_1(t,0), f(0) = 0$$

tem como única solução a função:

$$f(t) = \frac{t^2 - \int_0^t \mu(\tau)\Delta\tau}{2}, \qquad \text{(no caso T= } \mathbb{R}, \mu(t) = 0)$$

pois, usando a transformada de Laplace em escalas temporais:

$$\mathcal{L}\{f\}(t) = F(s) := \int_0^{\infty} f(t)[e_{\ominus s}]^{\sigma}(t,0),$$

vemos que,

$$\mathcal{L}\{h_2\}(t,0) = F(s) = \frac{1}{s^3},$$

sabendo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = Res_{s=0}\frac{e_s(t,0)}{s^3} = \frac{t^2 - \int_0^t \mu(\tau)\Delta\tau}{2}.$$

Os próximos passos na direção do uso das transformadas de Laplace em escalas temporais podem ser divididos em dois campos de interesse:

- Um propriamente mais "teórico", como o ainda em aberto de achar um contorno no plano complexo no qual é possível fazer integração obtendo os mesmos resultados que os obtidos através do uso dos círculos de Hilger, difíceis de operar (os casos T= $\mathbb{R}$ e T=$\mathbb{Z}$ estão resolvidos: o caso geral ainda não).
- Um mais "aplicado" que envolve a consideração de funções do tipo impulsivo (no estado).

Palavras-chave: *integral em escalas temporais, equações à diferença, EDO, transformada de Laplace.*

Referências

[1] R. Agarwal et all, Dinamic equations on time scales: a survey, J. of Comp. and Applied Math.,vol.141,pp.1-26,(2002).

[2] M. Bohner, A. Peterson, Dinamic equations on time scales,Birkhäuser Verlag, 2001.

[3] W. E. Boyce, R. C. Diprima, Equações Diferenciais Elementares, LTC Editora, 2006 (8ªed.).

[4] J. M. Davis, I. A. Gravagne, B. J. Jackson, R. J. Marks II, Bilateral Laplace Transforms on Time Scales: Convergence, Convolution, and the Characterization of Stationary Stochastic, Circuits, Systems and Signs Processing(Accepted, October 2009).

[5] S. Hilger, Differential and difference calculus –unified! Nonlinear Anal.,vol.30 (5) ,pp. 2683-2694,(1997).