ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

Detectando Ciclos Limites da Bifurcação de Hopf através do Método do Averaging

Rodrigo D. Euzébio*

Depto de Matemática, IBILCE, UNESP
15.054-000, São José do Rio Preto, SP
e-mail: rodrigo.euzebio@sjrp.unesp.br
Orientador: Claudio A. Buzzi

RESUMO

Um dos problemas em aberto mais importantes da matemática atual é aquele proposto em 1900 pelo matemático David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemática de Paris, que trata basicamente de determinar o número de ciclos limites que um sistema dinâmico possui, e que é conhecido como 16º problema de Hilbert. O problema pode ser abordado por vários métodos, dentre eles aquele conhecido como o *método do averaging* (ver [2] e [3]), e nosso objetivo nesse trabalho é exibir uma aplicação desse método a um fênomeno bem conhecido da teoria de sistemas dinâmicos, a saber, a bifurcação de Hopf (ver [4], [5] e [6]). Basicamente, a bifurcação de Hopf acontece quando variamos um parâmetro do campo de vetores que define o sistema e ocorre uma mudança na estabilidade deste, sendo que nesta transição podemos observar o surgimento de um ciclo limite. Nesse trabalho mostramos que é possível garantir a existência deste ciclo limite utilizando o averaging. No entanto, usaremos o método do averaging apresentado por Llibre e Buica em 2004 (ver [1]), em que os autores apresentam o método de um ponto de vista topológico, enfraquecendo as hipóteses de diferenciabilidade do averaging clássico.

Trabalharemos com o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -\epsilon x - y + \epsilon(xy + xy^2 + x^3 + xy^3 + x^3y) \\ \dot{y} & = & x - \epsilon y + \epsilon(y^2 + y^3 + yx^2 + x^3 + y^2x^2 + y^4) \end{array}\right. .$$

Se escrevemos $X = (x, y)^T$ e

$$R(X) = \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + xy^2 + x^3 + xy^3 + x^3y \\ y^2 + y^3 + yx^2 + x^3 + y^2x^2 + y^4 \end{pmatrix},$$

então nosso sistema na forma matricial torna-se

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\epsilon & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{pmatrix} X + \epsilon \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X) \end{pmatrix}$$

Notemos que a parte linear do sistema depende do parâmetro de perturbação ϵ e tem autovalores $-\epsilon \pm i$. Assim, se $\epsilon > 0$, o sistema é hiperbólico e topologicamente conjugado, pelo teorema de Grobman-Hartman, a um foco atrator linear. Da mesma forma, se $\epsilon < 0$, o sistema

*bolsista de Mestrado do CNPq

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL
DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

é topologicamente conjugado a um foco repulsor. Se $\epsilon = 0$, o sistema deixa de ser hiperbólico, e nesse caso temos um centro. Assim, o Teorema de Hopf (ver [4], pág. 317) garante que, quando variamos ϵ continuamente através do valor $\epsilon = 0$, o sistema muda de estabilidade após o aparecimento de um ciclo limite, o que caracteriza a bifurcação de Hopf.

Para aplicar o método e detectar esta órbita periódica, vamos mudar as coordenadas do sistema e trabalhar em coordenadas polares. Com efeito, seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\theta \end{cases}.$$

O sistemas nas novas coordenadas torna-se

$$\begin{cases} \dot{r} &= \epsilon r(r^2-1)(1+r\text{sen}\theta) \\ \dot{\theta} &= 1+\epsilon r^2\cos^2\theta \end{cases}.$$

Utilizando a regra da cadeia podemos eliminar o tempo no sistema anterior:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r(r^2-1)(1+r\text{sen}\theta)}{1+\epsilon r^2\cos^2\theta}$$

Se ϵ é suficientemente pequeno, podemos reescrever a equação diferencial acima como

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon(r(r^2-1)+r^2(r^2-1)\text{sen}\theta)+\epsilon^2(R(r,\theta,\epsilon)).$$

Dessa forma temos satisfeito as hipóteses do Teorema de Llibre e Buica, e assim podemos aplicar o método do averaging, sendo este baseado na teoria do grau topológico de Brouwer. Obteremos uma função cujo número de zeros nos dará a quantidade de ciclos limites que o sistema original possui. Neste caso, mostraremos que, excluindo-se o caso em que temos $r = 0$, que corresponde ao raio das coordenadas polares, a função possui um único zero, correspondente ao ciclo limite conhecido da bifurcação de Hopf.

A conclusão do trabalho é que o método do averaging detecta o ciclo limite da bifurcação de Hopf, confirmando resultados conhecidos anteriormente pelo Teorema da Bifurcação de Hopf. Mais geralmente, o trabalho mostra que é possível estender as aplicacões do método para a teoria das bifurcações, quando enxergamos o parâmetro de bifurcação como uma perturbação do sistema, funcionando assim como uma abordagem alternativa para eventuais problemas desta área que possam ser abordados pelo método.

Palavras-chave: *Sistemas Dinâmicos, Método Averaging, Bifurcação de Hopf.*

Referências

[1] A. Buica, J. Llibre, Averaging Methods for finding periodic orbits via Brouwer Degree, *Bull. Sci. math*, (2003) 7-22.

[2] F. Verhulst, "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems", Universitext, Springer, 1991.

[3] J.A. Sanders, F. Verhulst, "Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems", Applied Mathematical Sciences vol. 59, Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] L. Perko, "Differential Equations and Dynamical Systems", Springer, New York, 1991.

[5] R. Devaney, M. Hirsh, S. Smale, "Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos", Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.

[6] L.H.A. Monteiro, Sistemas Dinâmicos, Livraria da Física, São Paulo, 2006.