ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Estudos Numéricos para o Problema Direto na Tomografia por Impedância Elétrica

Juan Carlos Zavaleta Aguilar,
Universidade Federal de Itajubá, Campus de Itabira,
35900-373, Itabira, MG
E-mail: juanaguilar@unifei.edu.br.

Resumo: *Neste trabalho se estuda a solução numérica do problema direto na técnica de reconstrução de imagens conhecida como Tomografia por Impedância Elétrica (TIE). Os métodos numéricos propostos serão testados em problemas onde a solução analítica é conhecida para posteriormente serem aplicados na solução numérica do problema direto que trata a TIE. Outro assunto abordado neste trabalho é apresentar uma maneira eficiente da aproximação do Jacobiano (ou matriz de sensibilidade) usando os dados fornecidos pelo problema direto.*

Palavras-chave: *Reconstrução de Imagens, Tomografia por Impedância Elétrica, Método dos Volumes Finitos*

1 Introdução

A TIE é um problema inverso que determina a distribuição da condutividade σ(ou resistividade $\frac{1}{\sigma}$) da corrente elétrica no interior de um domínio condutor Ω dados que simultaneamente correntes são injetadas e voltagens são medidas em $\partial\Omega$. Esta propriedade converte a TIE numa ferramenta com importantes aplicações em diferentes áreas como medicina [1], [3], [4], [10], [11], geofísica [3], ciências ambientais [1], [2], e em testes não destrutivos de materiais [10]. A seguinte equação diferencial elíptica de segunda ordem governa a distribuição do potencial eletrostático u no meio condutivo Ω:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \tag{1}$$

onde os coeficientes σ são descontínuos por partes. Junto à equação (1) temos uma condição de fronteira de tipo Neumann:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = j, \tag{2}$$

onde j denota a corrente elétrica injetada e ν o vetor normal unitário.

Para modelar a condição 2 via a TIE, consideramos a injeção de corrente e medição de voltagem na fronteira por meio de L eletrodos posicionados em $\partial\Omega$ chamado de modelo *gap* [2], onde temos que j satisfaz:

$$j = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|}, \ l = 1, 2, .., L \\ \\ 0, \ x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^{L} e_l, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $|e_l|$ a área do eletrodo, I_d^l representam $l = 1, 2, 3, ..., L$ padrões de correntes injetadas nos eletrodos. Este modelo tem uma solução, quando consideramos o teorema de conservação de carga:

$$\int_{\partial\Omega} j = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{L} I_d^l = 0$$

e com a seguinte escolha das voltagens na fronteira obtemos a unicidade da solução:

$$\int_{\partial\Omega} u = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{L} U_l = 0.$$

2 Tratamento numérico da equação de difusão

Para resolver o problema (1) junto á condição (2), consideramos a equação de difusão com coeficientes variáveis e uma função fonte f definida em Ω. Assim esta equação em coordenadas polares fica da seguinte maneira:

$$-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sigma}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]=f \tag{4}$$

munida da condição de fronteira:

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial\nu}=g, \tag{5}$$

onde g é uma função conhecida.

Na maioria de aplicações da TIE, as interfaces $\Gamma\subset\Omega$ separam as regiões onde os coeficientes σ têm valores característicos. Assim se precisa de métodos apropriados para lidar com as descontinuidades dos coeficientes nas interfaces. Apesar de que existem diversas técnicas para resolver o problema de difusão (4) com a condição de fronteira (5) , por exemplo os usados em [6],[7],[9],[12], neste trabalho usamos o método dos volumes finitos (MVF), o qual tem um esquema numérico conservativo [5]. No eixo radial, afim de evitar um tratamento especial na singularidade do pólo, usamos a seguinte malha: $h_r=\frac{1}{M}$, $r_i=(i-1/2)h_r,\ i=1,..,M$ e $r_{i\pm1/2}=r_i\pm\frac{h_r}{2}$. Enquanto, no eixo azimutal temos as seguintes subdivisões: $h_\theta=\frac{2\pi}{N}$, e os seguintes nós: $\theta_j=jh_\theta,\ j=1,..,N$ e $\theta_{j\pm1/2}=\theta_j\pm\frac{h_\theta}{2}$.

As interfaces consideradas neste trabalho são ortogonais aos eixos coordenados. Denotamos como ξ uma interface na célula $[r_i,r_{i+1}]$ do eixo radial, sendo que $\xi=r_i+\rho h_r,\rho\in[0,1]$. Analogamente, uma interface no eixo azimutal tem a forma $\eta=\theta_j+\rho h_\theta,\rho\in[0,1]$.

O fluxo da equação (4) tem a forma:

$$W(r,\theta)=-\sigma\nabla u=\begin{bmatrix}-\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\\ -\frac{1}{r}\sigma\frac{\partial u}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix}.$$

Nesses termos a equação de difusão fica:

$$\nabla\cdot W(r,\theta)=f(r,\theta) \tag{6}$$

Integrando a equação (6) num volume finito V_P temos:

$$\int_{V_P}\nabla\cdot W(r,\theta)dA=rh_rh_\theta\varphi_P,$$

onde:

$$\varphi_P=\frac{1}{rh_rh_\theta}\int_{V_P}f(r,\theta)dA,$$

e pelo teorema da divergência:

$$\int_{V_P}\nabla\cdot W(r,\theta)dA=\int_{\partial\Omega}W\cdot\nu dl,$$

e aproximando as integrais pela regra do ponto médio, temos:

$$\begin{aligned} &h_\theta \left[r_{i+1/2}(W_1)_{i+1/2j} - r_{i-1/2}(W_1)_{i-1/2j} \right] + \\ &h_r \left[(W_2)_{ij+1/2} - (W_2)_{ij-1/2} \right] = h_r\, h_\theta r_i f_{ij}. \end{aligned} \tag{7}$$

Por outro lado, sabendo que $W_1 = -\sigma u_r$ e aproximando $W_1(r,\theta)$ pela série de Taylor truncada antes dos termos das derivadas de primeira ordem temos $W_1 \approx (W_1)_{i+1/2j}$, então:

$$\begin{cases} -r_{i+1/2}K_{i+1/2j}\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_r}\right) = r_{i+1/2}(W_1)_{i+1/2j} \\ -r_{i-1/2}K_{i-1/2j}\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r}\right) = r_{i-1/2}(W_1)_{i-1/2j}, \end{cases}$$

onde:

$$K_{i+1/2j} = \left(\frac{1}{h_r} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{\sigma(r,\theta_j)} \right)^{-1},$$

A segunda componente do fluxo é aproximada como: $W_2 = -\frac{\sigma}{r}u_\theta$ e considerando: $W_2 \approx (W_2)_{ij+1/2}$, temos:

$$\begin{cases} -K_{ij+1/2}\left(\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{r_i h_\theta}\right) = (W_2)_{ij+1/2} \\ -K_{ij-1/2}\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{r_i h_\theta}\right) = (W_2)_{ij-1/2}, \end{cases}$$

onde:

$$K_{ij+1/2} = \left(\frac{1}{h_\theta} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{d\theta}{\sigma(r_i,\theta)} \right)^{-1},$$

Assim, é obtido o esquema numérico conhecido como *Harmonic Avering* ou HA [5] ,[8]:

$$\begin{aligned} &-h_\theta \left[r_{i+1/2}K_{i+1/2j}\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_r}\right) - r_{i-1/2}K_{i-1/2j}\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r}\right) \right] - \\ &h_r \left[K_{ij+1/2}\left(\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{r_i h_\theta}\right) - K_{ij-1/2}\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{r_i h_\theta}\right) \right] = r_i h_r h_\theta f_{ij} \end{aligned} \tag{8}$$

Em geral, se a interface se encontra no intervalo $[r_i, r_{i+1}]$ e então a integral da expressão $K_{i+1/2j}$ pode ser aproximada pelo método do ponto médio. Seja $\xi = r_i + \rho h_r, \rho \in [0,1]$ uma interface no eixo radial e se em particular $\rho = 1/2$,temos:

$$K_{i+1/2j} = 2\left(\frac{\sigma_{ij}\sigma_{i+1j}}{\sigma_{ij} + \sigma_{i+1j}} \right)$$

e na direção azimutal,a aproximação de $K_{ij+1/2}$ é análoga.

O sistema linear resultante desta discretização é da forma $Ax = b$, onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão MN, simétrica e semi - definida positiva. Para termos uma única solução fazemos normalização pela fronteira da forma:

$$u(1,\theta_j) \approx \sum_{k=0}^{2} L_{M-k}(1) u_{M-kj}.$$

e pela regra do trapezio, temos a seguinte aproximação normalizada:

$$\tilde{u}(r,\theta) = u(r,\theta) - \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S} u\left(1, \frac{2\pi}{L}\right), \tag{9}$$

onde $C(\partial\Omega)$ é o comprimento da circunferência e S é suficientemente grande.

3 Aplicação na Tomografia por Impedância Elétrica

Consideramos o domínio como sendo o disco unitário. Os padrões de correntes injetadas em 16 eletrodos, correspondem ao modelo pula 1 [2], os quais são da forma: $I^1 = [-I, 0, I, 0, ..., 0]$, $I^2 = [0, -I, 0, I, 0, ..., 0]$, $I^3 = [0, 0, -I, 0, I, 0, ..., 0]$,...,$I^{15} = [I, 0, ..., -I, 0]$, $I^{16} = [0, I, ..., 0, -I]$, onde $I^d \in R^L$. Resolvemos o problema direto usando o método dos volumes finitos do tipo HA. As variáveis são os valores do potencial elétrico no interior e na fronteira do disco unitário. O sistema linear adota a forma $AG(U) = F$ ou:

$$\begin{bmatrix} T^1 & A^1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A^1 & T^2 & A^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & T^3 & A^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{M-2} & T^{M-1} & A^{M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{M-1} & T^M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & Z^{M-2} & Z^{M-1} & Z^M & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{M-1} \\ U_M \\ U_{M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I^d \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

onde T^i, A^j, Z^k são matrizes correspondentes ao esquema numérico (8). A matriz AG é uma matriz quadrada, não simétrica de dimensão $(M+1)N$, I^d contem os P padrões das correntes injetadas nos L eletrodos. A última linha das matrizes em bloco de AG correspondem á interpolação feita para aproximar as voltagens na fronteira do disco, os vetores U_s são vetores que correspondem às N variáveis para cada subdivisão i do eixo radial. Para resolver o sistema (10) usamos a normalização dada em (9).

Outro assunto importante na TIE é propor a maneira de como calcular, eficientemente, o Jacobiano (ou matriz de sensibilidade). Assim, a continuação presentamos uma metodologia deste cálculo, baseada nas componentes do fluxo. Os termos das componentes do fluxo nos nós são aproximados como:

$$\begin{cases} (W_1)_{1/2j} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(W_1)_{3/2j} \\ (W_1)_{ij} = \frac{(W_1)_{i+1/2j} - (W_1)_{i-1/2j}}{2}, i = 1, 2, 3, ..., M \end{cases}$$

$$\begin{cases} (W_2)_{ij} = \frac{(W_2)_{ij+1/2} - (W_2)_{ij-1/2}}{2}, j = 1, 2, 3, ..., N-1 \\ (W_2)_{iN} = \frac{(W_2)_{i1/2} - (W_2)_{iN-1/2}}{2}. \end{cases}$$

Agora, sejam $I^d = \left[I_1^d, I_2^d, I_3^d, ..., I_L^d\right], d = 1, 2, 3, ..., P$ os padrões de corrente injetados através dos L eletrodos e $\Psi^d = \left[\Psi_1^l, \Psi_2^l, \Psi_3^l, ..., \Psi_L^l\right], l = 1, 2, 3..., L$ os padrões de correntes chamados dipolos. Associamos as distribuições de potencial u^d e Υ^l que resolve a equação (1), onde I^d e Ψ^l são as condições de fronteira destes. Assim temos:

$$\sigma\frac{\partial \Psi^l}{\partial \nu} = \Psi^l = \begin{cases} \frac{-1}{|e_l|}, \ l = 1, 2, .., L \\ \frac{1}{|e_{l+1}|}, \ l = 1, 2, .., L \\ 0, \ x \in \partial\Omega \backslash \bigcup_{l=1}^{L} e_l. \end{cases}$$

Juntando estas considerações e usando o teorema da divergência, temos que as componentes do Jacobiano são dadas como:

$$J_{dl,k} = \frac{\partial V_{dl}}{\partial \sigma_k} = -\int_{\Omega_k} \nabla u\left(\Psi^l\right) \cdot \nabla u\left(I^d\right) dA. \tag{11}$$

Mas, sabemos que:

$$\begin{cases} -\sigma\nabla u\left(I^d\right) = W^I \\ -\sigma\nabla u\left(\Psi^d\right) = W^\Psi, \end{cases}$$

então, em termos dos fluxos W^I e W^Ψ e sendo V_k um volume finito, temos:

$$\int_{V_k} \nabla u\left(\Psi^l\right)\cdot\nabla u\left(I^d\right) dA = \frac{h_r h_\theta r_i\left[\left(W_1^\Psi\right)_{ij}\left(W_1^I\right)_{ij} + \left(W_2^\Psi\right)_{ij}\left(W_2^I\right)_{ij}\right]}{(\sigma)_{ij}^2},$$

assim, para cada volume finito V_k:

$$J_{dl,k} = -\frac{h_r h_\theta r_i\left[\left(W_1^\Psi\right)_{ij}\left(W_1^I\right)_{ij} + \left(W_2^\Psi\right)_{ij}\left(W_2^I\right)_{ij}\right]}{(\sigma)_{ij}^2}.$$

Um outro caminho para calcular o Jacobiano é o chamado Método *Standard* [11], onde as componentes apresentam a seguinte forma:

$$J_{dl,k} = \left[-(AG)^{-1}\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_k}(AG)^{-1} I^d\right]_{\sigma=\sigma_0},$$

onde $(AG)^{-1}$ é a inversa da matriz do sistema que resolve o problema direto (10). A matriz AG, a qual é dada em função das variáveis de condutividade σ_k é chamada de matriz simbólica, $\frac{\partial(AG)}{\partial\sigma_k}$ representa as derivadas parciais respeito das variáveis σ_k e I^d são os padrões de corrente.

4 Resultados

Para testar os métodos apresentados nas seção 2, consideramos as seguintes soluções analíticas do problema (4) com a condição de fronteira (5):

Problema 1

$$\begin{cases} u(r,\theta) = \frac{\left(r^2-r_m\right)^2}{4\sigma(r,\theta)}, \\ r_m = r_{M/2} + 0.5h_r \end{cases}$$

e a distribuição de condutividade:

$$\sigma(r,\theta) = \begin{cases} 0.001,\ 0 < r < r_m,\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1000,\ r_m \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Problema 2

$$\begin{cases} u(r,\theta) = \frac{r^3(r-r_m)^3 sin(z\theta)\left(cos^2(z\theta)-1\right)}{\sigma(r,\theta)}, \\ r_m = r_{M/2} + 0.5h_r, \\ y_n = y_{N/2} + 0.5h_\theta, \\ z\theta = \pi \end{cases}$$

e a distribuição de condutividade:

$$\sigma(r,\theta) = \begin{cases} 1,\ 0 < r < r_m,\ 0 \le \theta < y_n \\ 10,\ 0 < r < r_m,\ y_n \le \theta \le 2\pi \\ 0.001,\ r_m \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

M	Erro na norma L^2
16	0.0232906
32	0.0057873
64	0.0014446
128	3.6101586 10^{-4}

Tabela 1: Aproximação do problema 1

M	Erro na norma L^2
16	0.0126043
32	0.0023572
64	4.7971441 10^{-4}
128	1.0502971 10^{-4}

Tabela 2: Aproximação do problema 2

Volumes Finitos	Usando o Fluxo	Método Standard
MN	Tempo (s)	Tempo (s)
512	1.015625	2.96125
2024	3.921875	38.6175
8192	18.203125	185.5615

Tabela 3: Tempo computacional para o cálculo do Jacobiano

Nas tabelas 1 e 2, M denota as subdivisões no eixo radial e para o eixo azimutal fazemos o dobro de subdivisões, $N = 2M$. Para resolver o sistema linear usamos fatorização de Choleski [2]. Segundo estas tabelas, usando o erro na norma L^2 obtemos convergência de segunda ordem.

Na tabela 3, comparamos o desempenho no cálculo do Jacobiano em termos do fluxo e quando usamos o Método *Standard* em uma distribuição homogênea de condutividade e podemos observar que com a metodologia que usa os termos das componentes do fluxo o se cálculo gasta aproximadamente 10 vezes menos tempo computacional daquele que usa o método standard.

5 Conclusões

Desenvolveram-se algumas técnicas numéricas para aproximar o problema direto da TIE baseado no método dos volumes finitos, onde tratamos do problema das descontinuidade das variáveis. O método HA proposto neste trabalho apresenta convergência se segunda ordem, mesmo em saltos grandes nas interfaces. Para a aproximação do Jacobiano (ou matriz de sensibilidade) propomos uma maneira de calcular o Jacobiano em termos do fluxo o qual otimiza o tempo computacional total. Durante o desenvolvimento do trabalho surgiram algumas situações para estudos posteriores, por exemplo, a modelagem na fronteira levando em consideração o contato de impedância e o fato da voltagem ser constante nos eletrodos o qual resulta na formulação do chamado Modelo Completo de Eletrodos. Também se apresentou a tarefa de aplicar a metodologia que usa a TIE em domínios com fronteira que podem ser uma deformação do disco o qual conduz a aplicações mais realistas.

Referências

[1] A. Adler, R. Lionheart, Uses and abuses of EIDORS:An extensible software base for EIT, Manchester Institute for Mathematical Sciences, The University of Manchester, UK, 2008.

[2] J. Aguilar "Estudos numéricos para o problema da tomografia por impedância elétrica", Tese de Doutorado, IME-USP, 2009.

[3] L. Borcea, Electrical impedance tomography, *Inverse Problems*, (2002) 99-136.

[4] M. Cheney, D. Isaacson, J. Newell et al, NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem, *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2 (1990) 66-75.

[5] R. Ewing, O. Iliev, R. Lazarov, A modified finite volume approximation of second-order elliptic equations with discontinuous coefficients, *SIAM J. Scientific Computational*, (2001) 1335-1351.

[6] R. Le Veque, Z. Li, The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources, *SIAM J. Numerical Analysis*, (1994) 1019- 1044.

[7] L. Ming-Chih, T. Yu-Hou, A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk, *Manuscript of Comp. Phys*, (2005) 1-13.

[8] A. Samarskii, "Theory of difference schemes"', Nauka,Moscou, 2001.

[9] Z. Seyidmamedov, O. Ebru, A mathematical model and numerical solution of interface problems for steady state heat conduction, *Mathematical Problems in Engineering*, (2006) 1-18.

[10] M. Vaukhonen, "Electrical impedance tomography and prior information", Ph.D. thesis, Kuopio University, Kuopio, 1997.

[11] T. Yorkey, J. Webster, W. Tompkins, Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography, *IEEE Transactions in Biomedical Engineering*, 34 (1972) 843-852.

[12] W. Zhilin, W. Wei-Cheng, C. I-Lang, et al, New formulation for interface problems in polar coordinates, *SIAM Journal on Scientific Computing*, (2003) 224-245.