ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

O Teorema Minimax de von Neumann

Fabricio Alves Oliveira **Maria Angélica Araújo***
Faculdade de Matemática, UFU
38400-902, Uberlândia, MG
E-mail: fabricio.pet@gmail.com, mariangelica.petmat@yahoo.com.br,

Marcos Antônio da Câmara †
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
38400-902, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG
E-mail: camara@ufu.br.

‡RESUMO

A teoria dos jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais "agentes de decisão"interagem entre si. Ela fornece linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo.

Em seu início a teoria dos jogos chamou pouca atenção, não recebendo assim sua devida importância. Essa situação só veio a mudar quando o grande matemático John von Neumann, em 1928, provou o teorema Minimax. Segundo esse teorema há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos, cujos interesses são completamente opostos.

O objetivo deste trabalho é estudar a teoria dos jogos e apresentar o teorema Minimax de von Neumann, que tem muitas aplicações e cuja demonstração utiliza o teorema de dualidade da teoria de programação linear.

Um jogo tem os seguintes elementos básicos: existe um conjunto finito de jogadores, representado por $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im_i}\}$ de opções, denominadas **estratégias puras** do jogador g_i ($m_i \geq 2$). Um vetor $s = (s_{ij_i}, s_{-i}) = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{nj_n})$ é denominado um **perfil de estratégia pura**, em que s_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$ e $s_{-i} = (s_{1j_1}, \ldots, s_{i-1j_{i-1}}, s_{i+1j_{i+1}}, \ldots, s_{nj_n})$, uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i.

Para cada jogador $g_i \in G$, existe uma *função utilidade* que associa o ganho (*payoff*) $u_i(s)$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $s \in S$,

$$\begin{array}{rccc} u_i: & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & u_i(s) \end{array},$$

onde S é o produto cartesiano formado por todos os perfis de estratégia pura, denominado **espaço de estratégia pura** do jogo. Uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Existem vários conceitos diferentes de solução, em particular, estudamos o *Equilíbrio de Nash*.

Uma **estratégia mista** p_i para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é, p_i é um elemento do conjunto

*bolsistas do Programa de Educação Tutorial da Faculdade de Matemática - PetMat/SESu
†professor orientador e tutor do PetMat/SESu
‡Agradecemos a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_1 \geq 0, \ldots, x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}.$$

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano $\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \ldots \times \Delta_{m_n}$, denominado **espaço de estratégia mista**. Um vetor $p \in \Delta$ é denominado **perfil de estratégia mista**. Cada perfil de estratégia mista $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta$ determina um *payoff* (ganho) esperado, uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de probabilidades $p_1, \ldots, p_n$.

Definição: Dizemos que um perfil de estratégia mista $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \in \Delta$ é um **equilíbrio de Nash** se $u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq u_i\left(p, p_{-i}^*\right)$, para todo $p \in \Delta_m$, isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.

Definição: Um jogo de **soma constante com dois jogadores** é um jogo com dois jogadores comumente denominados *jogador linha* e *jogador coluna*, com estratégias

$$S_{\text{jogador linha}} = \{1, 2, \ldots, m\} \text{ e } S_{\text{jogador coluna}} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

e matriz *payoff*

		Jogador coluna			
		1	2	$\cdots$	n
Jogador linha	1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\cdots$	(a_{1n}, b_{1n})
	2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\cdots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\cdots$	(a_{mn}, b_{mn})

satisfazendo $a_{ij} + b_{ij} = c$, c constante, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. No caso particular em que a constante c é zero, dizemos que o jogo tem **soma zero**.

Teorema: Um perfil de estratégia mista (p^*, q^*) é um equilíbrio de Nash de um jogo de dois jogadores com soma constante definido pela matriz de *payoffs* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ do jogador linha se, e somente se,

$$\max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl} = p^{*T} A q^*.$$

Teorema (Minimax de von Neumann): Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de *payoffs* A do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégia mista $(p^*, q^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfazendo

$$v_l(A) = \max_{p \in \Delta_m} \min_{q \in \Delta_n} p^T A q = p^{*T} A q^* = \min_{q \in \Delta_n} \max_{p \in \Delta_m} p^T A q = v_c(A).$$

Em particular, (p^*, q^*) é um equilíbrio de Nash do jogo.

Esse teorema estabelece que, para jogos de dois jogadores com soma zero, $v_l(A) = v_c(A)$ sempre. Sendo assim, pelo teorema visto anteriormente, segue que, para esta classe de jogos, sempre existe pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Palavras-chave: *Teorema Minimax, von Neumann, Equilíbrio de Nash*

Referências

[1] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Second Edition. Addision-Wesley Publishing Company, 1989.

[2] B. A. Sartini, G. Garbugio, H. J. Bortolossi, P. A. Santos, L. S. Barreto, *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*, II Bienal da SBM, 2004.