

Melhorando as Condições de Estabilidade de Sistemas Fuzzy TS Usando Funções de Lyapunov Fuzzy *

Flávio A. Faria, **Geraldo N. Silva,**

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP,
E-mail: flaviof15@yahoo.com.br, gsilva@ibilce.unesp.br

Vilma A. Oliveira, **Michele C. Valentino,**

Depto de Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, USP,
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: vilma@sc.usp.br, michele.valentino@usp.br

Resumo: Neste trabalho são propostas condições relaxadas para a análise de estabilidade de sistemas fuzzy Takagi Sugeno (TS) contínuos, usando funções de Lyapunov fuzzy. O método é baseado na solução de desigualdades matriciais lineares (do inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)), que podem ser facilmente resolvidas usando técnicas de programação semi-definida. A eficiência do método é ilustrada na solução de um exemplo numérico.

Palavras-chave: Funções de Lyapunov Fuzzy, Análise de estabilidade, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

1 Introdução

Devido a sua complexidade, sistemas dinâmicos não-lineares são difíceis de serem analisados. Uma maneira de facilitar o projeto de controle para sistemas não-lineares é representá-los por modelos fuzzy Takagi Sugeno [23]. A ideia básica do projeto consiste na representação de um sistema não-linear como uma combinação fuzzy de sistemas lineares (modelos locais), que descrevem o comportamento do sistema não-linear em diferentes pontos do espaço de estados. Dependendo da escolha dos modelos locais e dos parâmetros da combinação fuzzy (conhecidos como, funções de pertinência) o modelo fuzzy pode fornecer uma representação aproximada [28] ou exata [26] do sistema não-linear. Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas e aplicações de sistemas fuzzy [1, 15]. A análise de estabilidade e o projeto de controladores é um dos conceitos mais importantes em sistemas fuzzy e normalmente é feito usando LMIs. A solução de problemas de otimização com restrições descritas por LMIs, pode ser realizada com os pacotes “LMI control toolbox” [14] e “SeDuMi” [22] do MATLAB. Nesses softwares, a solução ótima é encontrada usando algoritmos com tempo de convergência polinomial. Além disso, projetos baseados em LMIs podem ser, em geral, estendidos para tratar sistemas que possuem incertezas nos parâmetros da planta ou que estejam sujeitos a falhas estruturais [2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 13].

Normalmente, as condições de estabilidade são obtidas empregando o método direto de Lyapunov, e a maioria dos trabalhos encontrados na literatura usam uma função quadrática de Lyapunov (do inglês, Common Quadratic Lyapunov Function (CQLF)) para garantir a estabilidade do sistema [4, 5, 8, 17, 25, 27]. Contudo, já é conhecido na literatura que CQLFs conduzem a resultados conservadores e que em certos casos não é possível encontrar uma CQLF para um sistema fuzzy estável [16]. Consequentemente, alguns autores têm explorado o uso de funções de Lyapunov alternativas para obter condições de estabilidade menos conservadoras. Dentre as várias opções encontradas na literatura, as funções de Lyapunov fuzzy (do inglês, Fuzzy Lyapunov

*Este trabalho foi financiado pela FAPESP, processo: 2009/16796-3

por:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}_k \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

sendo \mathbf{P}_k , matrizes definida positivas. Esta metodologia consiste em encontrar funções quadráticas para cada um dos modelos locais, e então, gerar a função global de Lyapunov a partir de uma combinação fuzzy das funções quadráticas. A particularidade deste método, é que a combinação fuzzy da função global de Lyapunov é realizada com a mesma função de pertinência do modelo fuzzy TS. Dessa forma, a atuação da função de Lyapunov ocorre na mesma proporção que a ativação dos modelos locais.

Este trabalho propõe condições de estabilidade que podem ser menos conservadoras que às apresentadas em [21]. O estudo é realizado considerando modelos fuzzy TS dados por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t), \quad (2)$$

sendo $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^p$ um sinal disponível denominado vetor premissa, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representam as matrizes dos modelos locais e $h_k(\mathbf{z}(t))$ são as funções de pertinência de cada um dos modelos locais. As funções de pertinência satisfazem as seguintes propriedades:

$$\forall k \in \mathcal{R}, \quad h_k(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{z}(t)) = 1, \quad (3)$$

sendo \mathcal{R} o conjunto de números inteiros dados por $\{1, 2, \dots, r\}$. Apenas por facilidade de notação, de agora em diante vamos denotar $h_k(\mathbf{z}(t))$ por h_k .

As condições de estabilidade obtidas com (1) dependem explicitamente das derivadas temporais das funções de pertinência (3), e para convertê-las em LMI é necessário impor limites nos seus valores. Esta característica afeta diretamente a eficiência da técnica, e representa o ponto chave deste trabalho. Em [24], os autores conseguiram relaxar as condições de estabilidade considerando propriedades de funções de pertinência. Estes resultados foram melhorados recentemente em [21], com a adição de variáveis de folga.

Neste trabalho é verificado que as propriedades usadas em [21] e [24] podem ser melhor aproveitadas se permitirmos ao projetista atuar nas LMIs de acordo com o problema a ser resolvido. A nova estrutura adiciona graus de liberdade ao problema, melhorando a região de estabilidade encontrada pelas LMIs. A eficiência do novo método é ilustrada através da solução numérica de um exemplo.

2 Análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS

Ao longo do texto a notação $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \succeq \mathbf{0}$) é usada para representar matrizes definidas (semi-definidas) positivas. De modo equivalente a notação $\mathbf{M} \prec \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \preceq \mathbf{0}$) representa matrizes definidas (semi-definidas) negativas.

Em [21] é apresentado um procedimento que permite adicionar variáveis de folga nas restrições LMI. O procedimento consiste em verificar as condições de estabilidade do sistema (2), a partir da seguinte igualdade:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \sum_{k=1}^r h_k \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}(t). \quad (4)$$

Então, dadas as matrizes não singulares \mathbf{M}_1 e $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da equação acima segue que:

$$2 \left[\mathbf{x}(t)' \mathbf{M}_1 + \dot{\mathbf{x}}(t)' \mathbf{M}_2 \right] \times \left[\dot{\mathbf{x}}(t) - \sum_{k=1}^r h_k \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) \right] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}(t). \quad (5)$$

A seguinte proposição também é usada no desenvolvimento do resultado principal.

Proposição 1 Considere $h_k, k \in \mathcal{R}$, satisfazendo a propriedade (3). Dados os índices $i, j \in \mathcal{R}$, sendo $i \neq j$, para quaisquer matrizes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a seguinte igualdade é verificada:

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k = \frac{1}{2} \left[(\dot{h}_i + \dot{h}_j)(\mathbf{X} + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) - 2\dot{h}_j(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k(2\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j + \mathbf{X}) \right]. \quad (6)$$

Prova: Dadas as matrizes $\mathbf{P}_k, k \in \mathcal{R}$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k = \dot{h}_i \mathbf{P}_i + \dot{h}_j \mathbf{P}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k. \quad (7)$$

De (3) obtém-se a seguinte propriedade:

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k = 0, \text{ ou seja, } \dot{h}_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \dot{h}_k, \text{ para qualquer } i \in \mathcal{R}. \quad (8)$$

Desta forma, usando a propriedade (8), a igualdade (7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k &= - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k \\ &= -\dot{h}_j \mathbf{P}_i - \dot{h}_i \mathbf{P}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k(\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j). \end{aligned} \quad (9)$$

Agora, a partir da propriedade (8) segue que $\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{X} = 0$, para qualquer \mathbf{X} . Considerando este fato e as matrizes $\mathbf{P}_k, k \in \mathcal{R}$, dadas em (7), tem-se que

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(\mathbf{P}_k + \mathbf{X}) = (\dot{h}_i + \dot{h}_j)\mathbf{X} + \dot{h}_i \mathbf{P}_i + \dot{h}_j \mathbf{P}_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k. \quad (10)$$

Finalmente, somando (9), (10) e rearranjando os termos chega-se em (6). ■

A Proposição 1 é o ponto chave deste trabalho, é através dela que provamos o próximo teorema.

Teorema 1 Dados os números reais positivos ϕ_ρ , índices $i, j \in \mathcal{R}$, sendo $i \neq j$ e assumindo que $|\dot{h}_\rho| \leq \phi_\rho, \forall \rho \in \mathcal{R}$. O sistema fuzzy TS (2) é assintoticamente estável se para os índices i, j , existirem matrizes simétricas $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{P}_\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo as seguintes LMIs:

$$\mathbf{P}_\rho \succ \mathbf{0}, \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j \succeq \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\mathbf{X} + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j \succeq \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$2\mathbf{P}_\rho + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j \succeq \mathbf{0}, \quad \forall \rho \in \mathcal{R} - \{i, j\}, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_\phi - \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_k - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_1 & \mathbf{P}_k + \mathbf{M}_1 - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{P}_k + \mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_k & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}'_2 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{R}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_\phi = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (\phi_i + \phi_j)(\mathbf{X} + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) + 2\phi_j(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) + \sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq i \\ \rho \neq j}}^r \phi_\rho(2\mathbf{P}_\rho + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \end{array} \right].$$

Prova: Se a LMI (11) é factível, então existe uma função de Lyapunov dada por (1) tal que,

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r h_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \mathbf{x}(t) > 0, \quad \mathbf{x}(t) \neq 0. \tag{16}$$

Derivando a função $V(\mathbf{x}(t))$ definida acima e considerando a igualdade (5) e a propriedade (3), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k \right) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r h_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r h_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \dot{\mathbf{x}}(t) + 2 \left[\mathbf{x}(t)' \mathbf{M}_1 + \dot{\mathbf{x}}(t)' \mathbf{M}_2 \right] \times \left[\dot{\mathbf{x}}(t) - \sum_{k=1}^r h_k \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t) \right] \\ &= \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \mathbf{x}(t) + 2 \left[\mathbf{x}(t)' \left(\sum_{\rho=1}^r h_\rho \mathbf{P}_\rho \right) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}(t)' \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)' \mathbf{M}_1 \left(\sum_{k=1}^r h_k \mathbf{A}_k \right) \mathbf{x}(t) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{x}}(t)' \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)' \mathbf{M}_2 \left(\sum_{k=1}^r h_k \mathbf{A}_k \right) \mathbf{x}(t) \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{x}(t)' & \dot{\mathbf{x}}(t)' \end{array} \right] \sum_{k=1}^r h_k \left[\begin{array}{cc} \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho \mathbf{P}_\rho - \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_k - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_1 & \mathbf{P}_k + \mathbf{M}_1 - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{P}_k + \mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_k & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}'_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Agora, por hipótese segue que $|\dot{h}_\rho| \leq \phi_\rho, \forall \rho \in \mathcal{R}$. Então, quando as LMIs (12)-(14) são factíveis tem-se que

$$(\dot{h}_i + \dot{h}_j)(\mathbf{X} + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \leq (\phi_i + \phi_j)(\mathbf{X} + \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \tag{18}$$

$$-2\dot{h}_j(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \leq 2\phi_j(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \tag{19}$$

$$\sum_{\substack{\rho=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^r \dot{h}_\rho(2\mathbf{P}_\rho - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j + \mathbf{X}) \leq \sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq i \\ \rho \neq j}}^r \phi_\rho(2\mathbf{P}_\rho + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \tag{20}$$

Portanto, quando (15) é factível pode-se concluir de (17) à (20) que

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \left[\begin{array}{cc} \mathbf{x}(t)' & \dot{\mathbf{x}}(t)' \end{array} \right] \sum_{k=1}^r h_k \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{P}}_\phi - \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_k - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_1 & \mathbf{P}_k + \mathbf{M}_1 - \mathbf{A}'_k \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{P}_k + \mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_k & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}'_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right] < 0. \tag{21}$$

E pelo método direto de Lyapunov, o sistema (2) é assintoticamente estável. ■

A eficiência do Teorema 1 é verificada na solução de um exemplo numérico.

Exemplo 1

Considere um sistema fuzzy TS (2), representado pelos seguintes modelos locais [21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

A estabilidade do sistema acima foi verificada com o Teorema 1 e o método apresentado em [21, Teorema 1], para vários valores dos parâmetros a e b . Para a solução numérica das LMIs foram usados os pacotes “YALMIP toolbox” [18] e “SeDuMi” [22] do MATLAB. Durante a solução das LMIs, primeiramente foi suposto que $\phi_k = 0.85, \forall k \in \mathcal{R}$ e depois as LMIs foram resolvidas novamente para o caso $\phi_k = 0.85, \forall k \in \mathcal{R} - \{1\}, \phi_1 = 0.5$. Os resultados encontrados para a análise de estabilidade podem ser vistos na Figura 1.

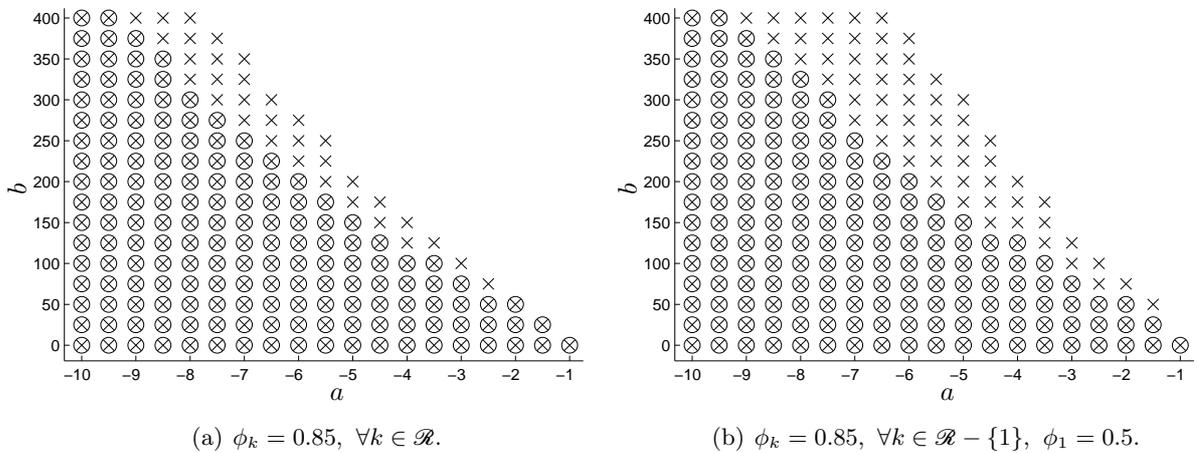


Figura 1: Região de estabilidade obtida com [21, Teorema 1] (o) e com o Teorema 1 para $i = 3$ e $j = 1$ (x).

Pela Figura 1 pode-se observar que o Teorema 1 (x) obtém uma região de estabilidade maior que o método apresentado em [21] (o). Logo, as condições de estabilidade do Teorema 1, para os índices $i = 3$ e $j = 1$, são menos conservadoras que às apresentadas em [21]. Além disso, durante a simulação do exemplo foi verificado que o Teorema 1 é mais sensível a variações no parâmetro ϕ_j . Por exemplo, a Figura 1(a) ilustra a região de estabilidade do Teorema 1 para o caso $\phi_k = 0.85, \forall k \in \mathcal{R}$ e a Figura 1(b) ilustra o caso $\phi_k = 0.85, \forall k \in \mathcal{R} - \{1\}, \phi_1 = 0.5$. Observe que a variação no parâmetro ϕ_1 não mudou a região de factibilidade do método apresentado em [21], enquanto que a região de estabilidade do Teorema 1 aumentou consideravelmente. Desta forma, quanto menor for o valor do parâmetro ϕ_j , melhor será a região de estabilidade encontrada pelo Teorema 1.

Observação 1 *Testes numéricos mostraram que a região de estabilidade do Teorema 1 considerando os índices $i = 1$ e $j = 2$ é inferior à encontrada com [21, Teorema 1], consequentemente a escolha dos índices i e j tem grande influência na eficiência do Teorema 1. No Exemplo 1 também foi verificado que a melhor região de estabilidade do Teorema 1, é a encontrada com os índices $i = 3$ e $j = 1$ (Figura 1).*

Observação 2 *Para obter a melhor região de estabilidade do Teorema 1 é necessário testar todos os índices $i, j \in \mathcal{R}$, sendo $i \neq j$. Logo, para encontrar a melhor região de estabilidade de um sistema fuzzy com r modelos locais, é necessário verificar todas as $r \times (r - 1)$ possíveis escolhas para os índices i, j . No Exemplo 1 foram realizados $4 \times 3 = 12$ testes numéricos para encontrar a melhor região de estabilidade.*

3 Conclusões

Neste trabalho foram propostas condições relaxadas para a análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS. Os resultados são obtidos diretamente de uma generalização do método apresentado em [24]. Essa nova metodologia permite que o projetista altere as restrições LMI, responsáveis pela análise de estabilidade, durante a solução do exemplo. A verificação da estabilidade de um

sistema fuzzy (2) com o Teorema 1 é realizada avaliando as LMIs para determinados índices i, j . Para encontrar a melhor região de estabilidade é necessário verificar todos os índices $i, j \in \mathcal{X}$, tais que $i \neq j$. Desta forma, pode ser complicado encontrar a melhor região de estabilidade em sistemas que possuem muitos modelos locais.

Uma extensão deste trabalho consiste na busca de condições ótimas para a escolha dos índices i e j .

Referências

- [1] N. S. D. Arrifano, V. A. Oliveira, R. A. Ramos, N. G. Bretas, and R. V. Oliveira. Fuzzy stabilization of power systems in a co-generation scheme subject to random abrupt variations of operating conditions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(2):384–393, 2007.
- [2] E. Assunção, F. A. Faria, and M. C. M. Teixeira. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos à falhas estruturais usando realimentação derivativa. In *Proceedings of the 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*, Presidente Prudente, 2008. UNESP. 6p.
- [3] E. Assunção, F. A. Faria, and M. C. M. Teixeira. \mathcal{D} -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In *Anais do 17º Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, Juiz de Fora, 2008. SBA. 6p. (Artigo 38448).
- [4] E. Assunção, F. A. Faria, M. C. M. Teixeira, and R. Cardim. Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy Takagi Sugeno. In *Anais do 8º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Florianópolis, 2007. [s.n.]. 6p. (Artigo 29542).
- [5] E. Assunção, F. A. Faria, M. C. M. Teixeira, and R. Cardim. Projeto de controladores fuzzy usando realimentação da derivada dos estados. In *Anais do 9º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Brasília, 2009. [s.n.]. 6p. (Artigo 54485).
- [6] E. Assunção, M. C. M. Teixeira, F. A. Faria, N. A. P. da Silva, and R. Cardim. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, 80(8):1260–1270, 2007.
- [7] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and F. A. Faria. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In *Systems, Structure and Control*, pages 1–28. In-Teh, Vienna, Austria, 2008. <http://books.i-techonline.com/book.php?id=73>.
- [8] E. R. P. da Silva, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and F. A. Faria. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*, Bauru, 2009. UNESP. 6p.
- [9] G. S. C. de Avellar, L. A. Mozelli, and R. M. Palhares. Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov fuzzy. In *Anais do 17º Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, Juiz de Fora, 2008. SBA. 6p. (Artigo 39225).
- [10] F. A. Faria, E. Assunção, and M. C. M. Teixeira. Realimentação da derivada dos estados em sistemas descritores usando LMIs. In *Proceedings of the 6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*, pages 737–742, São José do Rio Preto, 2007. UNESP.
- [11] F. A. Faria, E. Assunção, and M. C. M. Teixeira. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, 20(1):83–93, 2009.

- [12] F. A. Faria, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, and R. Cardim. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010:1–15, 2009.
- [13] F. A. Faria, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, R. Cardim, and N. A. P. da Silva. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, 82(1):1–12, 2009.
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI control toolbox - For use with MATLAB*. The Math Works Inc., 1995.
- [15] J. P. Hwang and E. Kim. Robust tracking control of an electrically driven robot: Adaptive fuzzy logic approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(2):232–247, 2006.
- [16] M. Johansson, A. Rantzer, and K.-E. Årzén. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):713–722, 1999.
- [17] E. Kim and H. Lee. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5):523–534, 2000.
- [18] J. Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, 2004.
- [19] L. A. Mozelli, G. S. C. de Avellar, R. M. Palhares, and R. F. dos Santos. Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov fuzzy. *Controle & Automação*, 21(1):96–107, 2010.
- [20] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. C. de Avellar. Novas condições de estabilidade e de estabilização para sistemas Takagi-Sugeno baseadas na função de Lyapunov fuzzy. In *Anais do 17^o Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, Juiz de Fora, 2008. SBA. 6p. (Artigo 37089).
- [21] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. C. de Avellar. A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179:1149–1162, 2009.
- [22] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999.
- [23] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.
- [24] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang. A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4):582–589, 2003.
- [25] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [26] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohatake, and H. O. Wang. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):525–537, 2001.
- [27] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):613–623, 2003.
- [28] M. C. M. Teixeira and S. H. Żak. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2):133–142, 1999.